Проблемы физики, математики и техники, № 3 (40), 2019

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

РАЦИОНАЛЬНЫЕ МНЕМОФУНКЦИИ НА ОКРУЖНОСТИ

А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова

Белорусский государственный университет, *Минск*

RATIONAL MNEMOFUNCTIONS ON CIRCLE

A.B. Antonevich, T.R. Shahava

Belarusian State University, *Minsk*

Рассматривается способ вложения пространства распределений на окружности в алгебру мнемофункций, порожденный аналитическим представлением распределений. Выделена подалгебра мнемофункций на окружности, порожденная рациональными мнемофункциями. Приведено полное описание этой подалгебры: выделены образующие, сформулировано в явном виде правило умножения распределений в ней.

***Ключевые слова**: мнемофункция, аналитическое представление распределения, алгебра рациональных мнемофункций.*

The method of embedding of the space of distributions on the circle into the algebra of mnemofunctions was considered in this paper. The subalgebra of mnemofunctions, generated by rational mnemofunctions, was detached. A complete description of this subalgebra was given. Its generators were singled out, the multiplication rule of distributions in this subalgebra was formulated explicitly.

***Keywords**: mnemofunction, analytical representation of distribution, algebra of rational mnemofunctions.*

Введение

Общий подход к решению проблемы умножения обобщенных функций (распределений) заключается в построении по заданному пространству обобщенных функций E дифференциальной алгебры G, которую называют алгеброй типа Коломбо, или алгеброй мнемофункций, и вложения $R: E \to G$. В работе [1] в качестве модельного примера была построена алгебра $G(\mathbb{S}^1)$ мнемофункций на окружности, так как для этой алгебры удается получить более наглядные ответы на вопросы о ее структуре, правилах умножения и др. В работе [2] были рассмотрены различные способы вложения пространства периодических обобщенных функций в алгебру мнемофункций и исследован вопрос о дополнительных свойствах таких вложений.

В данной работе, которая является продолжением работ [1], [2], рассматривается способ аппроксимации распределений, порожденный их аналитическим представлением, так как с ряда точек зрения он является наиболее естественным. Получено явное описание правила умножения для элементов подалгебры мнемофункций на окружности, порожденной рациональными функциями.

1 Предварительные сведения

Пространство обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, где $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, определяется как сопряженное к пространству $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. состоит из непрерывных линейных функционалов на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$.

Каждая функция φ из $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k z^k,$$

сходящийся в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, где коэффициенты Фурье находятся по формуле

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(z) z^{-k} \, |dz| = <\varphi, z^{-k}>,$$

причем последовательность φ_k убывает быстрее любой степени $\frac{1}{|k|}$.

Каждая обобщенная функция f разлагается в ряд Фурье

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k z^k, \; C_k = <f, z^{-k}>, \tag{1.1}$$

причем последовательность коэффициентов Фурье C_k возрастает не быстрее некоторой степени $|k|$.

Топология в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ задается счетной системой норм $p_m(\varphi) = \sum_k (1+|k|)^m |\varphi_k|$.

Алгебра мнемофункций на окружности $G(\mathbb{S}^1)$ строится следующим образом.

Сначала рассматривается множество $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из всех семейств $\{f_\varepsilon\}$ бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{S}^1$, зависящих от малого положительного параметра ε, таких, что для каждого $\{f_\varepsilon\}$ существуют числа μ и ν, при которых имеет место оценка

$$p_m(f_\varepsilon) \le \frac{C}{\varepsilon^{\mu m + \nu}}. \tag{1.2}$$

Далее рассматривается подмножество в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из семейств, быстро стремящихся к нулю:

$$J(\mathbb{S}^1) = \{g_\varepsilon : \forall p \text{ и } m\ \exists C : p_m(g_\varepsilon) \le C\varepsilon^p\}.$$

$\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ является дифференциальной алгеброй, а $J(\mathbb{S}^1)$ есть идеал в ней, следовательно, определена фактор-алгебра

$$G(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G(\mathbb{S}^1)} / J(\mathbb{S}^1),$$

которая называется *алгеброй мнемофункций на окружности*. Элемент алгебры $[f_\varepsilon]$ – класс эквивалентности, содержащий семейство $f_\varepsilon \in \widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, – называется мнемофункцией. В алгебре $G(\mathbb{S}^1)$ содержится подалгебра мнемочисел $\mathbb{C}^*$, порожденная постоянными, т.е. семействами $w(\varepsilon)$, не зависящими от z.

Связь мнемофункций с распределениями устанавливается следующим образом. Говорят, что мнемофункция *ассоциирована с распределением f*, если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к *f*. В общем случае информацию о мнемофункции дает анализ асимптотического поведения величин $< f_\varepsilon, \varphi >$, для которых часто в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ существует асимптотическое разложение вида

$$< f_\varepsilon, \varphi > = \sum_{k=k_0}^{\infty} < u_k, \varphi > \varepsilon^k, \ u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1), \quad (1.3)$$

где равенство (1.3) означает асимптотическую сходимость, т. е. для любого N и любого $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$

$$\sum_{k=k_0}^{N} < u_k, \varphi > \varepsilon^k - < f_\varepsilon, \varphi > = o(\varepsilon^N).$$

Способом аппроксимации R называется такой линейный оператор

$$R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \to G(\mathbb{S}^1),$$

при котором для каждого распределения *f* его образ $R(f) = \{f_\varepsilon\}$ ассоциирован с f. Способ аппроксимации порождает вложение пространства распределений в алгебру мнемофункций $G(\mathbb{S}^1)$ и позволяет задать произведение произвольных распределений как элемент алгебры $G(\mathbb{S}^1)$ по формуле

$$f \otimes_R g := R(f)R(g) \in G(\mathbb{S}^1). \quad (1.4)$$

Если произведение $R(f)R(g)$ ассоциировано с некоторым распределением h, то полагаем это распределение h произведением fg, порожденным заданным способом аппроксимации R. В общем случае информацию о поведении произведения $R(f)R(g)$ дает его асимптотическое разложение (1.3).

2 Аналитическое представление распределений

Рассмотрим способ аппроксимации распределений, часто используемый в анализе, основанный на известном аналитическом представлении распределений [3].

На пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определим два оператора

$$(P^+ f)(z) := f^+(z) = \sum_{0}^{\infty} C_k z^k, \quad (2.1)$$

$$(P^- f)(z) := f^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k. \quad (2.2)$$

Из оценки коэффициентов C_k следует, что для любого $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ ряд (2.1) сходится в круге $|z| < 1$, его сумма $f^+(z)$ является аналитической функцией, а ряд (2.2) сходится при $|z| > 1$, и его сумма $f^-(z)$ является функцией, аналитической при $|z| > 1$ и стремящейся к нулю на бесконечности. Пара функций (f^+, f^-), удовлетворяющая этим условиям, называется *аналитическим представлением распределения* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

Посредством отображения

$$f \to (P^+ f, P^- f) = (f^+, f^-)$$

аналитическое представление порождает вложение пространства распределений в пространство кусочно аналитических функций $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$, т. е. пар (f^+, f^-), где функция f^+ является аналитической при $|z| < 1$, а функция f^- стремится к нулю на бесконечности и аналитична при $|z| > 1$. При этом аналитические функции $f^\pm(z)$ таковы, что при их разложении в степенной ряд коэффициенты растут не быстрее некоторой степени *k*. Это свойство эквивалентно тому, что функции $f^\pm(z)$ имеют рост не выше степенного при $|z| \to 1$, т. е. имеют место оценки вида

$$|f(z)| \le \frac{C}{\| z | - 1|^m}.$$

Аналитическое представление обобщенной функции порождает естественную аппроксимацию распределения *f* гладкими функциями с помощью значений аналитического представления на окружностях радиуса $1-\varepsilon$ и радиуса $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$:

$$R_a(f) = f_\varepsilon(z) = f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k (1-\varepsilon)^{|k|} z^k. \quad (2.3)$$

Поскольку функции $f_\varepsilon(z)$ удовлетворяют оценкам вида (1.2), формула (2.3) задает инвариантное вложение пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций $G(\mathbb{S}^1)$, и произведение определяется с помощью формулы (1.4).

Опишем произведение мнемофункций $R_a(f)R_a(g)$ более детально. Результат умножения распределений $(f^+, f^-)\times(g^+, g^-)$ может быть представлен в виде

$$R_a(f)R_a(g) =$$
$$= \left[f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) \right] \times$$
$$\times \left[g^+((1-\varepsilon)z) + g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) \right] =$$
$$= f^+((1-\varepsilon)z)g^+((1-\varepsilon)z) + f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) +$$
$$+ f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^+((1-\varepsilon)z) + f^+((1-\varepsilon)z)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right).$$

Здесь

$$f((1-\varepsilon)z)g((1-\varepsilon)z) = R((f g, 0)),$$
$$f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right) = R_a((0, f^-g^-)),$$

и их сумма есть аппроксимирующее семейство для распределения с аналитическим представлением (f^+g^+, f^-g^-). При фиксированном ε сумма двух последних слагаемых

$$\gamma_\varepsilon(z) := f^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)g^+((1-\varepsilon)z) +$$
$$+ f^+((1-\varepsilon)z)g^-\left(\frac{z}{1-\varepsilon}\right)$$

есть функция, аналитическая в кольце

$$K_\varepsilon = \{z : 1-\varepsilon < |z| < \frac{1}{1-\varepsilon}\}.$$

Ее аналитическое представление задается с помощью применения операторов $P^\pm$.

Следующая теорема описывает правило умножения распределений в пространстве кусочно аналитических функций.

***Теорема* 2.1.** *В пространстве* $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ *результат умножения* $(f^+, f^-)\times(g^+, g^-)$ *может быть представлен в виде*

$$R_a(f)R_a(g) = (h_\varepsilon^+(z), h_\varepsilon^-(z)), \tag{2.4}$$

где

$$h_\varepsilon^+(z) = R_a((f^+g^+, 0)) + P^+(\gamma_\varepsilon(z)),$$
$$h_\varepsilon^-(z) = R_a((0, f^-g^-)) + P^-(\gamma_\varepsilon(z)).$$

Заметим, что каждая из функций $h_\varepsilon^\pm(z)$ разлагается в ряд Лорана по степеням ε с конечной главной частью, в результате чего при рассматриваемом способе аппроксимации для любого произведения $f_\varepsilon(z)g_\varepsilon(z)$ существует асимптотическое разложение по степеням ε вида (1.3).

Следующее утверждение есть следствие из теоремы 2.1.

***Теорема* 2.2.** *В пространстве* $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ *произведение распределений* $f = (f^+, 0)$ *и* $g = (g^+, 0)$ *есть распределение с аналитическим представлением* $(f^+g^+, 0)$, *т. е. справедливо равенство*

$$(f^+, 0)\times(g^+, 0) = (f^+g^+, 0). \tag{2.5}$$

Аналогично, произведение распределений $f = (0, f^-)$ *и* $g = (0, g^-)$ *есть распределение с анналитическим представлением* $(0, f^-g^-)$:

$$(0, f^-)\times(0, g^-) = (0, f^-g^-). \tag{2.6}$$

3 Алгебра рациональных мнемофункций на окружности

Распределение f будем называть *рациональным*, если при его аналитическом представлении функции $f^\pm$ являются рациональными. Пусть $\mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$ есть подпространство в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, состоящее из рациональных распределений. Обозначим через $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ наименьшую подалгебру в алгебре мнемофункций на окружности, содержащую мнемофункции вида $R_a(u), u \in \mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$, и все обобщенные числа $\mathbb{C}^*$.

Выделение такой алгебры мотивируется двумя причинами. Во-первых, многие наиболее употребительные распределения являются рациональными, и в приложениях вопрос о придании смысла произведению возникает именно для таких произведений. В частности, распределения в примере Л. Шварца, который иллюстрирует невозможность корректного определения операции умножения распределений, являются рациональными.

Во-вторых, как будет показано ниже, правило умножения в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ задается в явном виде, что позволяет получить более конкретные результаты, чем в общем случае по формуле (1.4) или по формуле (2.4).

Введем следующие обозначения. Рациональное распределение с аналитическим представлением $\left(\frac{1}{(z-\xi)^n}, 0\right), |\xi| \geq 1$, будем обозначать $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, а через $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ – распределение с аналитическим представлением $\left(0, \frac{1}{(z-\eta)^m}\right), |\eta| \leq 1$.

Будем обозначать z^{n+} аналитическое представление функции z^n, т. е. $(z^n, 0)$. Многочлен $p(z)$ имеет аналитическое представление $(p(z), 0)$ и его образ при вложении R_a есть семейство $p_\varepsilon(z) = p((1-\varepsilon)z)$.

Опишем правило умножения в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$. Согласно теореме 2.2, произведение $(f^+, 0)\times(g^+, 0)$ определено для любых функций f^+ и g^+, аналитических в области $|z| < 1$, и находится по формуле (2.5). Также для любых функций f^- и g^-, аналитических в области $|z|>1$, произведение $(0,f^-)\times(0,g^-)$ определено по формуле (2.6).

Поэтому для задания правила умножения в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ достаточно найти произведение элементов вида $(f^+,0)\times(0,g^-)$.

Рассмотрим сначала произведения простейших распределений $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$.

***Лемма* 3.1.** *Если* $|\xi|\geq 1$, $|\eta|\leq 1$, *то*

$$\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)\times\left(0,\frac{1}{z-\eta}\right)= =\left(\frac{C_1(r;\xi;\eta)}{z-\xi},\frac{C_2(r;\xi;\eta)}{z-\eta}\right), \tag{3.1}$$

где $C_1(r;\xi;\eta)=\frac{r^2}{\xi-\eta r^2}$, $C_2(r;\xi;\eta)=\frac{1}{\eta r^2-\xi}$, $r=1-\varepsilon$.

Доказательство. Мнемофункции, соответствующие рассматриваемым распределениям, есть

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^+}\right)=\frac{1}{rz-\xi},\ R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^-}\right)=\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}.$$

Их произведение есть семейство гладких функций на окружности

$$R_a\left(\frac{1}{(z-\xi)^+}\right)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^-}\right)=\frac{1}{rz-\xi}\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}. \tag{3.2}$$

Согласно правилу умножения в пространстве кусочно-аналитических функций (теореме 2.1) при каждом ε для функции (3.2) нужно построить аналитическое представление, т. е. применить операторы $P^\pm$. Получаем

$$\frac{1}{rz-\xi}\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}=C_1(r;\xi;\eta)\frac{1}{rz-\xi}+C_2(r;\xi;\eta)\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}, \tag{3.3}$$

где

$$C_1(r;\xi;\eta)=\frac{r^2}{\xi-\eta r^2};\ C_2(r;\xi;\eta)=\frac{1}{\eta r^2-\xi}$$

и коэффициенты связаны соотношением

$$C_1(r;\xi;\eta)=-r^2C_2(r;\xi;\eta).$$

Правая часть равенства (3.3) есть аппроксимирующее семейство для (3.1), что и требовалось показать. □

Отметим, что основное упрощение для рассмотренных функций заключается в том, что применение операторов $P^\pm$ равносильно разложению произведения конкретных рациональных функций на сумму элементарных дробей, что осуществляется с помощью простых вычислений.

Еще одним показательным примером произведения рациональных распределений является произведение распределений z^+ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$, которое не согласовано с умножением и находится по следующему правилу.

***Лемма* 3.2.** Если $|\eta|\leq 1$, то

$$(z,0)\times\left(0,\frac{1}{z-\eta}\right)=\left(r^2,\frac{\eta r^2}{z-\eta}\right); \tag{3.4}$$

$$(z^n,0)\times\left(0,\frac{1}{z-\eta}\right)= =\left(\sum_{k=0}^{n-1}z^k r^{2(n-k)}\eta^{n-1-k},r^{2n}\eta^n\frac{1}{z-\eta}\right). \tag{3.5}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение аппроксимирующих семейств

$$R_a(z^+)R_a\left(\frac{1}{(z-\eta)^-}\right)=rz\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}=r^2+\frac{\eta r^2}{\frac{z}{r}-\eta}.$$

Последнее равенство здесь соответствует применению операторов $P^\pm$.

При вычислении произведения $(z^n,0)\times(0,\frac{1}{z-\eta})$ возникают другие выражения. Аппроксимирующее семейство для распределения $(z^n,0)$ есть $r^n z^n$, поэтому при умножении аппроксимаций получаем семейство гладких функций

$$r^n z^n\times\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta},$$

для которых нужно получить аналитическое представление, содержащее положительные и отрицательные компоненты. Здесь искомый результат можно получить с помощью процедуры деления многочленов с остатком:

$$r^n\times\frac{z^n}{\frac{z}{r}-\eta}=p_{n-1}(rz)+M\frac{1}{\frac{z}{r\eta}-1},$$

где число $M=\eta^n r^{2n}$, а $p_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$ переменной z с коэффициентами, зависящими от r и от η. Эти коэффициенты могут быть найдены непосредственным делением или с помощью метода неопределенных коэффициентов. Наиболее просто требуемое выражение получается с помощью разложения в ряд Фурье. Если

$$\frac{1}{(z-\eta)^-}=\sum_{-\infty}^{-1}\eta^{-k-1}z^k,$$

то

$$r^n z^n\times\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}=\sum_{k=0}^{n-1}(rz)^k r^{2(n-k)}\eta^{n-1-k}+r^{2n}\eta^n\frac{1}{\frac{z}{r\eta}-1}.$$

Последнее выражение является аппроксимирующим семейством для распределения с аналитическим представлением (3.5). □

Следует отметить, что в силу того, что существует предел правой части в равенстве (3.4) при $r\to 1$, произведение распределений z^+ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ ассоциировано с распределением, у которого аналитическое представление равно

$$\left(1,\frac{\eta}{z-\eta}\right)=1+\frac{\eta}{(z-\eta)^-}.$$

Также и произведение распределений z^{n+} и

$\frac{1}{(z-\eta)^{-}}$ является распределением с аналитическим представлением

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k \eta^{n-1-k}, \frac{\eta^n}{z-\eta}\right).$$

Следующая теорема дает полное описание алгебры рациональных мнемофункций $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$.

***Теорема* 3.1.** *Алгебра рациональных мнемофункций на окружности* $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ *состоит из элементов вида*

$$\sum_{k=0}^{m} A_k^{+}(\varepsilon)(1-\varepsilon)^k z^k + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^{+}(\varepsilon)}{((1-\varepsilon)z-\xi_k)^j} + \\ + \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^{-}(\varepsilon)}{(\frac{z}{1-\varepsilon}-\eta_k)^j}, \tag{3.6}$$

где $|\xi_k| \ge 1$, $|\eta_k| \le 1$, $A_k^{+}(\varepsilon), B_{kj}^{+}(\varepsilon), B_{kj}^{-}(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$. *В этой алгебре элементы вида* $\frac{1}{(z-\xi)^{+}}$, $\frac{1}{(z-\eta)^{-}}$ *и* z^{+} *являются образующими. Закон умножения задается однозначно соотношениями* (2.5), (2.6), (3.1), (3.4).

Доказательство. Так как над полем комплексных чисел только многочлен первой степени является неприводимым, то любую рациональную функцию можно представить в виде линейной комбинации элементарных дробей: если

$$Q(z) = \prod_{i=1}^{n} (z-z_i)^{p_i},$$

то

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{0}^{m} A_k z^k + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \frac{B_{ij}}{(z-z_i)^j}, A_k, B_{ij} \in \mathbb{C}, z_i \in \mathbb{C}.$$

При аналитическом представлении рационального распределения $f = (f^{+}, f^{-})$ функция f^{+} является аналитической при $|z| < 1$, поэтому, если она рациональна, ее разложение на элементарные дроби имеет вид

$$f^{+}(z) = \sum_{0}^{m} A_k^{+} z^k + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+} \frac{B_{kj}^{+}}{(z-\xi_k)^j}, \text{где } |\xi_k| \ge 1. \tag{3.7}$$

Рациональная функция f^{-} является аналитической при $|z| > 1$ и стремится к нулю на бесконечности, поэтому ее разложение на элементарные дроби следующее:

$$f^{-}(z) = \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-} \frac{B_{kj}^{-}}{(z-\eta_k)^j}, \text{где } |\eta_k| \le 1. \tag{3.8}$$

Таким образом, умножение аппроксимаций, порожденных аналитическими представлениями рациональных распределений, сводится к вычислению произведений (в указанном выше смысле) слагаемых в приведенных формулах (3.7) и (3.8), т. е. элементарных дробей и функции z^k.

Как было отмечено ранее, произведение положительных распределений определено, и при этом

$$(f^{+},0)\times(g^{+},0) = (f^{+}g^{+},0).$$

Также

$$(0,f^{-})\times(0,g^{-}) = (0,f^{-}g^{-}).$$

Поэтому для вычисления произведения рациональных мнемофункций осталось определить правило, по которому происходит умножение положительных элементов на отрицательные. В рассматриваемом случае рациональных распределений это произведения вида $(f^{+},0)\times(0,g^{-})$, где f^{+} есть элементарная дробь или функция z^k, а g^{-} есть элементарная дробь.

Для случая, когда $f^{+} = \frac{1}{z-\xi}$, $g^{-} = \frac{1}{z-\eta}$, такое произведение описано в лемме 3.1 и находится по формуле (3.1). Произведения элементарных дробей других степеней, когда $f^{+} = \frac{1}{(z-\xi)^n}$, $g^{-} = \frac{1}{(z-\eta)^m}$, получаются с помощью рекуррентных соотношений через произведения первых степеней, т. е. с помощью равенства (3.1). Например, при $n=1$, $m=2$:

$$\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\frac{1}{(z-\eta)^{2-}} = \left[\frac{1}{(z-\xi)^{+}}\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right]\frac{1}{(z-\eta)^{-}} = \\ = \left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta}\right)\times\left(0,\frac{1}{z-\eta}\right) = \\ = \left(\frac{c_1^2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta} + \frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{(z-\eta)^2}\right). \tag{3.9}$$

А при $n=2$, $m=1$:

$$\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\frac{1}{(z-\eta)^{-}} = \\ = \left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta}\right)\times\left(\frac{1}{z-\xi},0\right) = \\ = \left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{(z-\xi)^2} + \frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi}, \frac{c_2^2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta}\right).$$

Значит, равенство (3.1) задает правило умножения распределений $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\frac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ в алгебре $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$.

Правило умножения z^{+} на $\frac{1}{(z-\eta)^{-}}$ описано в лемме 3.2 и находится через соотношение (3.4). Как было показано ранее, из него получаем формулу умножения на степень z^{+}, соотношение (3.5), и формулы для умножения z на степени $\frac{1}{(z-\eta)^{-}}$, например,

$$z^{+}\times\frac{1}{(z-\eta)^{2-}} = \left[z^{+}\frac{1}{(z-\eta)^{-}}\right]\frac{1}{(z-\eta)^{-}} = \\ = \left(r^2, \frac{\eta r^2}{z-\eta}\right)\times\left(0,\frac{1}{z-\eta}\right) = \left(0, \frac{\eta r^2}{(z-\eta)^2} + \frac{r^2}{z-\eta}\right).$$

Произведения других степеней определяются аналогично.

Таким образом, произведение элементов вида (3.6) представляется в таком же виде и, следовательно, множество таких элементов есть алгебра $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$, а элементы вида $\frac{1}{(z-\xi)^+}$, $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ и z^+ являются образующими в ней. □

4 Анализ некоторых произведений рациональных распределений

Рассмотрим произведение распределений $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ более детально и исследуем поведение произведений соответствующих мнемофункций, в частности, построим первые и вторые члены их асимптотических разложений. Здесь мы используем такие разложения не в слабом смысле, т. е. в пространстве распределений, а в алгебре мнемофункций. В качестве базисных элементов, по которым осуществляется разложение, будем рассматривать мнемофункции вида $R_a(u), u \in \mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$.

I. Проанализируем сначала произведение $\frac{1}{(z-\xi)^+}\times\frac{1}{(z-\eta)^-}$, когда $\xi \neq \eta$ и $|\xi|\geq 1$, $|\eta|\leq 1$.

Если $\xi\neq\eta$, то существует конечный предел коэффициентов $C_1(r;\xi;\eta)$ и $C_2(r;\xi;\eta)$ при $r\to 1$, т. е. их разложения начинаются с конечного числа, а именно

$$C_1(r;\xi;\eta)=\frac{r^2}{\xi-\eta r^2}=\frac{1}{\xi-\eta}-\frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\varepsilon+\ldots;$$

$$C_2(r;\xi;\eta)=\frac{1}{\eta r^2-\xi}=\frac{1}{\eta-\xi}+\frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\varepsilon+\ldots.$$

Поэтому при условии, что $\xi\neq\eta$, мнемофункция вида (3.2) ассоциирована с распределением u_0, имеющим аналитическое представление

$$u_0=\left(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\xi},\frac{1}{\eta-\xi}\frac{1}{z-\eta}\right).$$

А второй член разложения в пространстве мнемофункции имеет вид $\varepsilon R_a(u_1)$, и аналитическое представление u_1 есть

$$u_1=\left(-\frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\xi},\frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\eta}\right).$$

Обратим внимание на случай, когда $\xi\neq\eta$, но при этом $|\xi|=1$ и $|\eta|=1$. Тогда оба распределения f и g имеют сингулярности на окружности, их произведение в смысле распределений не определено, но произведение в смысле мнемофункций ассоциировано с распределением u_0. Это является подтверждением общепринятого мнения, что если множества точек сингулярности двух распределений не пересекаются, то их произведение можно определить достаточно естественным образом.

II. Качественно другую ситуацию имеем, если $\xi=\eta$, что возможно только, если $|\xi|=1$ и $|\eta|=1$. Покажем, что здесь главным членом асимптотического разложения произведения является дельта-функция с бесконечно большим коэффициентом.

В силу того, что ряд Фурье дельта-функции есть $\delta_\xi=\sum_{-\infty}^{\infty}\xi^{-k}z^k$, ее аналитическое представление равно

$$\delta_\xi=\left(-\frac{\xi}{z-\xi},\frac{\xi}{z-\xi}\right).$$

Тогда δ_ξ выражается с помощью распределений $\frac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\frac{1}{(z-\xi)^-}$:

$$\delta_\xi=-\frac{\xi}{(z-\xi)^+}+\frac{\xi}{(z-\xi)^-}.$$

Если $\xi=\eta$, то произведение $\frac{1}{(z-\xi)^+}\times\frac{1}{(z-\xi)^-}$ имеет асимптотическое разложение, в котором главным членом является $-\frac{1}{2\xi^2\varepsilon}\delta_\xi$.

В рассматриваемом случае коэффициенты $c_1(r;\xi)=c_1(\varepsilon;\xi)$ и $c_2(r;\xi)=c_2(\varepsilon;\xi)$ являются бесконечно большими при $r\to 1$ и имеют следующее разложение по степеням ε:

$$\begin{gathered}c_1(\varepsilon;\xi)=\frac{(1-\varepsilon)^2}{\xi(1-(1-\varepsilon)^2)}=\\ =\frac{1}{2\xi\varepsilon}-\frac{3}{4\xi}+\frac{1}{8\xi}\varepsilon+\frac{3}{16\xi}\varepsilon^2+\ldots;\\ c_2(\varepsilon;\xi)=\frac{1}{\xi((1-\varepsilon)^2-1)}=\\ =-\frac{1}{2\xi\varepsilon}-\frac{1}{4\xi}-\frac{1}{8\xi}\varepsilon-\frac{1}{16\xi}\varepsilon^2+\ldots.\end{gathered}\qquad(4.1)$$

Отсюда получаем асимптотическое разложение для произведения

$$\begin{gathered}\frac{1}{(z-\xi)^+}\frac{1}{(z-\xi)^-}=\\ =c_1(\varepsilon;\xi)\frac{1}{(z-\xi)^+}+c_2(\varepsilon;\xi)\frac{1}{(z-\xi)^-}\sim\\ \sim\frac{1}{2\xi\varepsilon}\frac{1}{(z-\xi)^+}-\frac{1}{2\xi\varepsilon}\frac{1}{(z-\xi)^-}+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)=\\ =-\frac{1}{2\xi^2\varepsilon}\delta_\xi+o\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).\end{gathered}\qquad(4.2)$$

То есть главным членом асимптотического разложения является дельта-функция с бесконечно большим коэффициентом.

В заключении раздела рассмотрим пример Л. Шварца и выясним, что представляет собой произведение $\mathcal{P}(\frac{1}{z-1})$, $z-1$ и δ_1. Напомним, что произведение этих распределений принимает разные значения при разной расстановке скобок, а именно

$$\left\{\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)\times(z-1)\right\}\times\delta_1=1\times\delta_1=\delta_1,$$

но при этом

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)\times\{(z-1)\times\delta_1\}=P\left(\frac{1}{z-1}\right)\times 0=0.$$

А при перестановке порядка сомножителей получаем выражение, которое не определено

$$\left\{\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)\times\delta_1\right\}\times(z-1).$$

Утверждение. *При умножении, заданном с помощью аналитического представления, произведение*

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)\times(z-1)\times\delta_1$$

ассоциировано с $\frac{1}{2}\delta_1$ *и первые члены его асимптотического разложения имеют вид*

$$\frac{1}{2}\delta_1-\varepsilon\frac{1}{(z-1)^-}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(z-1)^{2-}}+o(\varepsilon).$$

Доказательство. Так как разложение δ_1 в ряд Фурье

$$\delta_1=\sum_{-\infty}^{+\infty}z^k,$$

то δ_1 можно представить в виде

$$\delta_1=-\frac{1}{(z-1)^+}+\frac{1}{(z-1)^-}.$$

Аналогично для $\mathcal{P}(\frac{1}{z-1})$

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{-1}z^k-\frac{1}{2}\sum_{0}^{\infty}z^k,$$

тогда

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(z-1)^+}+\frac{1}{(z-1)^-}\right).$$

Пусть полиномы вкладываются в алгебру рациональных мнемофункций через аналитическое представление. Тогда

$$z-1\to(z-1)^+=\lim_{\varepsilon\to0}((1-\varepsilon)z-1)=\lim_{r\to1}(rz-1).$$

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^+\delta_1\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1}-\frac{1}{rz-1}\right)-$$

$$-\varepsilon\left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{z}{r}-1)^2}\right)+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1}+\frac{1}{(\frac{z}{r}-1)^2}\right)\to$$

$$\to\frac{1}{2}\delta_1-\varepsilon\frac{1}{(z-1)^-}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(z-1)^{2-}}+o(\varepsilon).\qquad\square$$

Замечание. Многочлены можно вложить в алгебру мнемофункций другим способом, поставив с соответствие $p(z)$ стационарное семейство – мнемофункцию $p_\varepsilon(z)=p(z)$. При таком вложении получаем произведение, которое отличается от описанного выше младшими членами:

$$\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)(z-1)\delta_1\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1}-\frac{1}{rz-1}\right)-$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{\frac{z}{r}-1}+\frac{1}{(\frac{z}{r}-1)^2}+\frac{1}{rz-1}+\frac{1}{(rz-1)^2}\right)\to$$

$$\to\frac{1}{2}\delta_1-i\varepsilon\mathcal{P}'\left(\frac{1}{z-1}\right)+o(\varepsilon).$$

5 Произведения рациональных распределений, ассоциированные с распределениями

В общем случае произведение распределений f и g, порожденное заданным вложением, есть мнемофункция. В литературе особо выделяются пары f и g, произведения которых *конечны*, т. е. ассоциированны с некоторым распределением u, так как тогда можно считать, что $f\times g=u$. В общем случае вряд ли можно получить явное описание таких пар распределений. Покажем, что для пар рациональных распределений могут быть описаны все случаи, когда их произведение конечно.

Как уже отмечалось, произведение рациональных распределений есть линейная комбинация произведений элементарных рациональных мнемофункций вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\frac{1}{(z-\eta)^{n-}}$ и z^{n+}. Согласно полученным выше утверждениям, каждое произведение $R_a(f)R_a(g)$ представляется в виде линейной комбинации элементарных рациональных мнемофункций с коэффициентами, зависящими от ε. При этом, если в соответствующее выражение для произведения входят члены вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\times\frac{1}{(z-\xi)^{m-}}$, возникают слагаемые с бесконечно большими коэффициентами, которые не ассоциированы с распределениями. Определим условия, когда произведение рациональных распределений, содержащее такие слагаемые, конечно.

***Теорема* 5.1.** *Пусть* $f=(f^+,f^-)$, $g=(g^+,g^-)$, где

$$f^\pm=\frac{A_1^\pm}{z-1}+\frac{A_2^\pm}{(z-1)^2};\ g^\pm=\frac{B_1^\pm}{z-1}+\frac{B_2^\pm}{(z-1)^2}.$$

Если $f^\pm\neq0$, *то произведение распределений f и g ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для коэффициентов выполнены соотношения*

$$B_j^+=tA_j^+,\ B_j^-=-tA_j^-,\ j=1,2.\qquad(5.1)$$

Если $f^+=0$ $(f^-=0)$, *то произведение конечно только, если* $g^+=0$ $(g^-=0)$.

Доказательство. Пусть $f=(f^+,f^-)$, $g=(g^+,g^-)$. Распишем произведение fg:

$$(f^++f^-)\times(g^++g^-)=$$
$$=f^+g^++f^-g^-+f^+g^-+g^+f^-.$$

Как было показано ранее, первые два слагаемые ассоциированны с некоторым распределением, а бесконечно большие слагаемые вносят произведения вида $\frac{1}{(z-1)^{n+}}\frac{1}{(z-1)^{m-}}$, поэтому надо рассмотреть только сумму двух последних слагаемых. Имеем

$$f^+g^-+g^+f^-=\frac{A_2^+B_2^-+A_2^-B_2^+}{(z-1)^{2+}(z-1)^{2-}}+$$

$$+\frac{A_2^+B_1^-+A_1^-B_2^+}{(z-1)^{2+}(z-1)^-}+$$

$$+\frac{A_1^+B_2^-+A_2^-B_1^+}{(z-1)^+(z-1)^{2-}}+\frac{A_1^+B_1^-+A_1^-B_1^+}{(z-1)^+(z-1)^-}=$$

$$=(A_2^+B_2^-+A_2^-B_2^+)\left(\frac{c_1^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}}+\frac{2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)}{(z-1)^+}+\right.$$

$$\left.+\frac{2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^-}+\frac{c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}\right)+$$

$$+\Big[c_2(\varepsilon)(A_2^+B_1^-+A_1^-B_2^+)+$$

$$+c_1(\varepsilon)(A_1^+B_2^-+A_2^-B_1^+)\Big]\left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+}+\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-}\right)+$$

$$+(A_1^+B_1^-+A_1^-B_1^+)\left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+}+\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-}\right)+$$

$$+(A_2^+B_1^-+A_1^-B_2^+)\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}}+(A_1^+B_2^-+A_2^-B_1^+)\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}.$$

Так как коэффициенты $c_1(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-1})$ и $c_2(\varepsilon)=O(\varepsilon^{-1})$, то $\frac{1}{\varepsilon}$ в наибольшей степени внесут в разложение произведения $2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)$ и $2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)$. Так как эти множители стоят при линейно независимых выражениях $\frac{1}{(z-1)^+}$ и $\frac{1}{(z-1)^-}$, то слагаемые, растущие, как $\frac{1}{\varepsilon^3}$, исчезают только тогда, когда $A_2^+B_2^-+A_2^-B_2^+=0$. Среди оставшихся слагаемых имеем только одно, содержащее $\frac{1}{(z-1)^{2+}}$ с коэффициентом $c_1(\varepsilon)(A_2^+B_1^-+A_1^-B_2^+)$, следовательно, это слагаемое исчезает только если $A_2^+B_1^-+A_1^-B_2^+=0$. Аналогично получаем, что $A_1^+B_2^-+A_2^-B_1^+=0$. При выполнении этих условий остается одно слагаемое

$$(A_1^+B_1^-+A_1^-B_1^+)\left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+}+\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-}\right),$$

для обращения которого в нуль необходимо, чтобы $A_1^+B_1^-+A_1^-B_1^+=0$. Следовательно, для того, чтобы произведение мнемофункций $R_a(f)R_a(g)$ было ассоциировано с распределением, необходимо, чтобы $f^+g^-+g^+f^-$ обращалось в нуль. Определим условия, когда это выполняется. Обозначим $x=\frac{1}{(z-1)^+}$, $y=\frac{1}{(z-1)^-}$. Тогда

$$\begin{gathered}f^+g^-+g^+f^-=(A_1^+x+A_2^+x^2)(B_1^-y+B_2^-y^2)+\\+(A_1^-y+A_2^-y^2)(B_1^+x+B_2^+x^2)=0.\end{gathered}\tag{5.2}$$

Если $f^+=0$, то из (5.2) следует, что $g^+=0$. Аналогично из $f^-=0$ следует, что $g^-=0$. В оставшихся случаях получаем, что

$$\frac{B_1^+x+B_2^+x^2}{A_1^+x+A_2^+x^2}=-\frac{B_1^-y+B_2^-y^2}{A_1^-y+A_2^-y^2}=t.$$

Следовательно, коэффициенты многочленов пропорциональны, а значит, выполняются соотношения (5.1). Достаточность утверждения теоремы очевидна, так как при выполнении (5.1) $f^+g^-+g^+f^-$ обращается в нуль, и значит, асимптотическое разложение произведения не содержит бесконечно больших членов. □

В частном случае, когда коэффициенты при вторых степенях равны нулю, получаем только одно условие $A_1^+B_1^-+A_1^-B_1^+=0$, т. е. это условие равносильно равенству нулю определителя матрицы коэффициентов:

$$\begin{vmatrix}A_1^+ & -A_1^-\\ B_1^+ & B_1^-\end{vmatrix}=0.\tag{5.3}$$

В книге [4] приведены только три примера конечных произведений. На окружности аналогами этих примеров будут произведения

$$\left(\delta_1+2i\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)\right)\left(\delta_1-2i\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)\right),$$

$$\delta_1\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right),\left(\delta_1\pm2\mathcal{P}\left(\frac{1}{z-1}\right)\right)^2.$$

Все эти произведения удовлетворяют условию (5.3), а значит, являются конечными, т. е. являются распределениями.

Опишем общий случай, когда произведение рациональных распределений является распределением. Ранее было показано, что произведение произвольного рационального распределения и многочлена является распределением, поэтому рассмотрим только распределения, аналитическое представление которых представляет собой правильные рациональные функции. Пусть рациональное распределение f имеет сингулярный носитель $S_f=\{\xi_k, |\xi_k|=1\}$, а множество $S_g=\{\eta_k, |\eta_k|=1\}$ есть сингулярный носитель рационального распределения g. Пусть множество $S=S_f\cap S_g=\{z_1,\ldots,z_m\}$. Не ограничивая общности, считаем, что кратность n_k одинакова для точек z_k, $1\le k\le m$. Тогда $f=(f^+,f^-)$, где

$$f^+(z)=\sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^+}{(z-z_k)^j}+\sum_{\xi_k\in S_f\setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C_{ij}^+}{(z-\xi_k)^j}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{D_{kj}^+}{(z-\nu_k)^j},\text{где }|\nu_k|>1.$$

$$f^-(z)=\sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^-}{(z-z_k)^j}+\sum_{\xi_k\in S_f\setminus S}\sum_{j=1}^{q_k}\frac{C_{ij}^-}{(z-\xi_k)^j}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{D_{kj}^-}{(z-\nu_k)^j},\text{где }|\nu_k|<1.$$

И распределение $g=(g^+,g^-)$, где

$$g^+(z)=\sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^+}{(z-z_k)^j}+$$

$$+\sum_{\eta_k\in S_g\setminus S}\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\widetilde{C}_{ij}^{+}}{(z-\eta_k)^j}+\sum_{k=1}^{s^+}\sum_{j=1}^{l_k^+}\frac{\widetilde{D}_{kj}^{+}}{(z-\mu_k)^j}, \text{где } |\mu_k|>1.$$

$$g^-(z)=\sum_{z_k\in S}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^-}{(z-z_k)^j}+$$

$$+\sum_{\eta_k\in S_g\setminus S}\sum_{j=1}^{r_k}\frac{\widetilde{C}_{ij}^{-}}{(z-\eta_k)^j}+\sum_{k=1}^{s^-}\sum_{j=1}^{l_k^-}\frac{\widetilde{D}_{kj}^{-}}{(z-\mu_k)^j}, \text{где } |\mu_k|<1.$$

Выделим слагаемые, при умножении которых могут появиться бесконечно большие коэффициенты:

$$f_{k,S}^{\pm}=\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^{\pm}}{(z-z_k)^j},\ g_{k,S}^{\pm}=\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^{\pm}}{(z-z_k)^j}. \qquad (5.4)$$

***Теорема* 5.2.** П*роизведение рациональных мнемофункций $R_a(f)R_a(g)$ ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого k, $1\le k\le m$, при котором $f_{k,S}^{\pm}\ne 0$, существует число t_k, что для коэффициентов справедливы соотношения*

$$B_{kj}^+=t_kA_{kj}^+,\ B_{kj}^-=-t_kA_{kj}^-. \qquad (5.5)$$

Доказательство. Как было показано ранее, бесконечно большие мнемофункции возникают при произведениях вида $\frac{1}{(z-\xi)^{n+}}\times\frac{1}{(z-\xi)^{m-}}$. Поэтому бесконечно большие слагаемые в произведение вносят только выражения

$$\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^+}{(z-z_k)^{j+}}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^-}{(z-z_k)^{j-}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{n_k}\frac{A_{kj}^-}{(z-z_k)^{j-}}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{B_{kj}^+}{(z-z_k)^{j+}}, z_k\in S. \qquad (5.6)$$

Заметим, что произведение мнемофункций, порожденных (5.6), находится по тому же правилу, что и произведение многочленов

$$p_{n_k}^+(x)=\sum_{j=1}^{n_k}A_{kj}^+x^j,\ p_{n_k}^-(y)=\sum_{j=1}^{n_k}A_{kj}^-y^j,$$

$$q_{n_k}^+(x)=\sum_{j=1}^{n_k}B_{kj}^+x^j,\ q_{n_k}^-(y)=\sum_{j=1}^{n_k}B_{kj}^-y^j$$

в выражении

$$p_{n_k}^+(x)q_{n_k}^-(y)+p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(x).$$

Очевидно, что если выражение (5.6) тождественно равно нулю, то бесконечно больших слагаемых в асимптотическом разложении произведения $R_a(f)R_a(g)$ нет. Обращение в нуль (5.6) равносильно выполнению

$$p_{n_k}^+(x)q_{n_k}^-(y)+p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(x)=0. \qquad (5.7)$$

После разделения переменных в (5.7) получаем:

$$\frac{q_{n_k}^+(x)}{p_{n_k}^+(x)}=-\frac{q_{n_k}^-(y)}{p_{n_k}^-(y)}=t_k. \qquad (5.8)$$

Из (5.8) следует, что

$$q_{n_k}^+(x)=t_kp_{n_k}^+(x), q_{n_k}^-(y)=-t_kp_{n_k}^-(y).$$

Следовательно, коэффициенты многочленов пропорциональны, а значит, выполняются условия (5.5) и выражение (5.6) тождественно равно нулю.

Покажем, что если выражение (5.6) отлично от нуля, то оно содержит бесконечно большие слагаемые. Согласно (3.1), произведение xy имеет вид

$$xy=P_1(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))+Q_1(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon)), \quad (5.9)$$

где $P_1(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))=c_1(\varepsilon)x$, а $Q_1(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))= =c_2(\varepsilon)y$, и коэффициенты $c_1(\varepsilon)$, $c_2(\varepsilon)$ ведут себя как ε^{-1}. Для xy^2 имеем:

$$xy^2=P_1(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))+Q_2(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon)),$$
$$P_1(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))=c_1^2(\varepsilon)x,$$
$$Q_2(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))=c_1(\varepsilon)c_2(\varepsilon)y+c_2(\varepsilon)y^2.$$

Получили выражение, линейно независимое от (5.9), каждое слагаемое которого ведет себя как некоторая степень ε^{-1}. Рассмотрим произведение x^2y^2:

$$x^2y^2=P_2(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))+Q_2(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon)),$$
$$P_2(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))=c_1^2(\varepsilon)x^2+2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)x,$$
$$Q_2(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))=2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)y+c_2^2(\varepsilon)y^2.$$

И так далее. Следовательно, повышение степени одночлена приводит к появлению бесконечно больших слагаемых, которые линейно не зависят от предыдущих выражений. Поэтому если мы рассмотрим линейное отображение F пространства многочленов от двух переменных в пространство многочленов от четырех переменных, действующее на одночленах по правилу

$$F(x^ny^m)=P_n(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))+Q_m(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon)),$$

то, исходя из вышесказанного, отображение F является инъективным и его ядро состоит только из нуля.

Применив отображение F к

$$p_{n_k}^+(x)q_{n_k}^-(y)+p_{n_k}^-(y)q_{n_k}^+(x)=$$
$$=\sum_{j,l=1}^{n_k}(A_{kj}^+B_{kl}^-+A_{kl}^-B_{kj}^+)x^jy^l, \qquad (5.10)$$

получим комбинацию линейно независимых многочленов от четырех переменных, где каждое слагаемое ведет себя как некоторая степень ε^{-1}:

$$\sum_{j,l=1}^{n_k}(A_{kj}^+B_{kl}^-+A_{kl}^-B_{kj}^+)\times$$
$$\times(P_j(x,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))+Q_l(y,c_1(\varepsilon),c_2(\varepsilon))).$$

В силу того, что отображение F линейно и инъективно, его образ не содержит степени ε^{-1} тогда и только тогда, когда исходный многочлен (5.10) есть тождественный нуль, т. е. выполняется (5.7). Значит, для того, чтобы мнемофункция $R_a(f)R_a(g)$ была ассоциирована с некоторым распределением, необходимо и достаточно, чтобы (5.6) тождественно равнялось нулю, а это равносильно выполнению (5.5). □

Заключение

В данной работе исследовалась подалгебра мнемофункций на окружности, порожденная рациональными функциями. Получено явное описание структуры этой подалгебры: показано, что образующими в ней являются элементы вида $\frac{1}{(z-\xi)^+}$, $\frac{1}{(z-\eta)^-}$ и z^+, и выявлены соотношения, описывающие правило умножения образующих. Проведен анализ произведений рациональных распределений и описаны все случаи, когда произведение произвольных рациональных распределений является распределением, а не мнемофункцией, как в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антоневич*, *А.Б.* Алгебра мнемофункций на окружности / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова, Е.В. Шкадинская // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 3 (36). – С. 55–62.

2. *Антоневич*, *А.Б.* Вложение распределений в алгебру мнемофункций на окружности / А.Б. Антоневич, Т.Г. Шагова // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 4 (37). – С. 52–61.

3. *Бремерман*, *Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г. Бремерман. – М.: Мир, 1965. – 276 с.

4. *Антосик*, *П.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. – М.: Мир, 1976. – 311 с.

Поступила в редакцию 06.03.19.