Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 517.947.35:517.946

МАТЕМАТИКА

Ю. Н. ВАЛИЦКИЙ

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 3 XI 1970)

1. Рассматривается произвольный эллиптический оператор вида

$$Lu \equiv -a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y} + qu$$

в ограниченной области D с кусочно-гладкой границей; $a > 0$, $b > 0$; $a, b \in C_2$; $c, d, q \in C_1$ в $\bar{D}$. Заменим L его простейшим (схема «крест») разностным аналогом L_h, определенным на квадратной сетке с шагом h:

$$L_h u_h = -\alpha u_h(x+h, y) - \beta u_h(x, y+h) - \gamma u_h(x-h, y) - \\ - \delta u_h(x, y-h) + \omega u_h(x, y),$$

$$\alpha h^2 = a - \frac{ch}{2}, \quad \beta h^2 = b - \frac{dh}{2}, \quad \gamma h^2 = a + \frac{ch}{2}, \quad \delta h^2 = b + \frac{dh}{2},$$

$$\omega h^2 = 2\left(a + b + \frac{qh^2}{2}\right).$$

Границу Γ области D заменим множеством Γ_h ближайших к ней узлов сетки; совокупность внутренних узлов будем называть D_h.

Известно (1), что при $q \geqslant 0$ для оператора L_h справедлив принцип максимума и имеет место сходимость решений задачи

$$L_h u_h = f_h, \quad u_h|_{\Gamma_h} = \varphi_h \tag{1}$$

к решению задачи

$$Lu = f, \quad u|_\Gamma = \varphi \quad (f, \varphi \in C_1) \tag{2}$$

при наличии аппроксимации правой части и граничных условий.

Цель данной работы — освободиться от ограничения $q \geqslant 0$ и выяснить вопрос о применимости метода конечных разностей к исследованию спектра оператора L; этот спектр дискретен и целиком располагается в правой полуплоскости (2).

2. Для функции Грина $G_h(P, Q)$ оператора L_h, определяемой равенствами

$$L_{hP} G_h(P, Q) = \frac{1}{h^2}\delta(P, Q), \quad (P, Q) \in D_h \times D_h,$$

$$G_h(P, Q) = 0, \quad P \in \Gamma_h,$$

имеем следующий результат (3).

Функция Грина $G_h(P, Q)$ конечно-разностного оператора L_h в области D_h стремится при $h \to 0$ к функции Грина $G(P, Q)$ дифференциального оператора L в области D равномерно относительно $P, Q \in D$, $|P - Q| \geqslant \rho$ при любом заданном $\rho > 0$.

Кроме того, отметим (3, 4), что

$$h^2 \sum_{P, |P-Q| < \rho} G_h(P, Q) \to 0 \quad (h, \rho \to 0). \tag{3}$$

Воспользуемся неравенством ([4]) $G_h(P, Q) \leqslant C \ln \frac{C}{|P-Q|+h}$.

Из этого неравенства непосредственно вытекает утверждение: по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\rho > 0$, что, начиная с достаточно малого h, для любого $Q_0 \in D_h$ выполняется неравенство

$$h^2 \sum_{P, |-Q_0| < \rho} G_h^2(P, Q) < \varepsilon.$$

Отметим также, что $G_h(Q, P) = G_h^*(P, Q)$, где G_h^* — функция Грина оператора L_h^*, аппроксимирующего оператор L^*.

Введем в рассмотрение повторное ядро $K(P, Q)$ ядра $G(P, Q)$:

$$K(P, Q) = \int_D G(P, P') G(P', Q)\, dP' \quad (P, Q \in D),$$

а также «повторное ядро» $K_h(P, Q)$ конечно-разностного ядра $G_h(P, Q)$:

$$K_h(P, Q) = h^2 \sum_{P' \in D_h} G_h(P, P') G_h(P', Q) \quad (P, Q \in D_h).$$

С помощью прямых оценок можно убедиться, что функции $K(P, Q)$ и $K_h(P, Q)$ равномерно ограничены и имеет место равномерная сходимость $K_h(P, Q)$ к $K(P, Q)$ $(h \to 0)$.

Пусть $\mathscr{R}(\lambda)$ и $\mathscr{R}_2(\lambda)$ — резольвенты Фредгольма ядер $G(P, Q)$ и $K(P, Q)$ соответственно, $\mathscr{D}(\lambda)$ и $\mathscr{D}_2(\lambda)$ — их знаменатели Фредгольма. Аналогично, обозначим через $\mathscr{R}_h(\lambda)$, $\mathscr{R}_{2,h}(\lambda)$, $\mathscr{D}_h(\lambda)$ и $\mathscr{D}_{2,h}(\lambda)$ резольвенты Фредгольма и знаменатели Фредгольма соответствующих ядер $G_h(P, Q)$ и $K_h(P, Q)$. Тогда, следуя Гильберту ([5]), можно доказать, что $\mathscr{D}_{2,h}(\lambda) \to \mathscr{D}_2(\lambda)$ при $h \to 0$ равномерно в любом круге $|\lambda| \leqslant R$, а также, что $\mathscr{R}_{2,h}(\lambda)$ при достаточно малом h существует и стремится при $h \to 0$ к $\mathscr{R}_2(\lambda)$ равномерно в любом круге $|\lambda| \leqslant R$ за вычетом окрестностей нулей $\mathscr{D}_2(\lambda)$. Ядра $\mathscr{R}(\lambda)$ и $\mathscr{R}_2(\lambda)$ связаны равенством ([6])

$$\mathscr{R}(\lambda) = G(P, Q) + \lambda \mathscr{R}_2(P, Q; \lambda^2) + \lambda^2 \int_D G(P, P') \mathscr{R}_2(P', Q; \lambda^2)\, dP';$$

аналогичное равенство имеет место для разностных ядер:

$$\mathscr{R}_h(\lambda) = G_h(P, Q) + \lambda \mathscr{R}_{2,h}(P, Q; \lambda^2) + \lambda^2 h^2 \sum_{P' \in D_h} G_h(P, P') \mathscr{R}_{2,h}(P', Q; \lambda^2).$$

Отсюда следует, что равномерно на любом множестве $|P - Q| \geqslant \rho$ и в любом круге $|\lambda| \leqslant R$ за вычетом окрестностей нулей $\mathscr{D}_2(\lambda^2)$ имеет место сходимость $\mathscr{R}_h(\lambda)$ к $\mathscr{R}(\lambda)$ при $h \to 0$.

Замечая, что $\mathscr{R}(\lambda)$ и $\mathscr{R}_h(\lambda)$ суть функции Грина операторов $L - \lambda E$ и $L_h - \lambda E$ соответственно (где λ не есть собственное значение оператора L), и записывая решения задач

$$L_h u_h - \lambda u_h = f_h, \quad u_h|_{\Gamma_h} = \varphi_h; \tag{4}$$

$$Lu - \lambda u = f, \quad u|_\Gamma = \varphi \tag{5}$$

при $\varphi \equiv 0$ и $\varphi_h \equiv 0$ в виде

$$u_h(P) = h^2 \sum_{Q \in D_h} \mathscr{R}_h(P, Q; \lambda) f_h(Q), \quad u(P) = \int_D \mathscr{R}(P, Q; \lambda) f(Q)\, dQ,$$

а также пользуясь (3) и суммируемостью функции $\mathscr{R}(P, Q; \lambda)$ по переменной P, приходим к заключению о сходимости $u_h(P)$ к $u(P)$ $(h \to 0)$, равномерной в D.

В случае $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi_h \approx \varphi$ рассмотрим, наряду с решениями u_h и u задач (4) и (5), функцию u_0, определяемую условиями

$$Lu_0 - \lambda u_0 = 0, \quad u_0|_{\widetilde{\Gamma}_h} = \widetilde{\varphi}_h$$

($\widetilde{\Gamma}_h$ — ломаная, содержащая Γ_h; $\widetilde{\varphi}_h$ — кусочно-линейная функция на $\widetilde{\Gamma}_h$, совпадающая с φ_h на Γ_h), и сеточную функцию $\{u_0\}_h$, равную в узлах сетки значениям u_0. Тогда, по доказанному, будем иметь $u_h - \{u_0\}_h \to u - u_0$ $(h \to 0)$, т. е. $u_h \to u$.

Если в задачах (1) и (2) не выполнено условие $q \geqslant 0$, то, обозначая $\min\limits_P q(P) = -\lambda$ и представляя L и L_h в виде $L = (L + \lambda E) - \lambda E$, $L_h = (L_h + \lambda E) - \lambda E$, приходим к искомому результату.

Теорема 1. *Решение $u_h(P)$ задачи* (1) *равномерно сходится при $h \to 0$ к решению $u(P)$ задачи* (2) *при указанных выше условиях (без предположения $q \geqslant 0$).*

3. Теорема 2. *Любое собственное значение задачи* (2) *есть предел некоторой последовательности собственных значений задачи* (1) *при $h \to 0$. Обратно, любая последовательность собственных значений* (1) *при $h \to 0$ имеет своими предельными точками лишь собственные значения задачи* (2) *и бесконечно удаленную точку.*

Для доказательства достаточно применить к функциям $\mathscr{D}_{2,h}(\lambda)$ и $\mathscr{D}_2(\lambda)$ теорему Гурвица о нулях равномерно сходящейся последовательности аналитических функций.

Приступая к вопросу об аппроксимации собственных и присоединенных функций оператора L, соответствующих некоторому значению λ_0, заметим, что их можно искать, как собственные и присоединенные функции повторного ядра $K(P, Q)$, соответствующие собственному значению λ_0^2. Пусть $\lambda_h^2 \to \lambda_0^2$ есть последовательность собственных значений ядер $K_h(P, Q)$ и

$$\lambda_h^2 h^2 K_h u_h = u_h, \tag{6}$$

причем можно считать, что $\sup\limits_{h;\, P \in D_h} |u_h(P)| < \infty$. Множество левых частей (6) при всевозможных значениях h компактно, и тем самым существует последовательность u_{h_i}, стремящаяся при $h_i \to 0$ к собственной функции оператора K, соответствующей собственному значению λ_0^2. Применяя аналогичные рассуждения к присоединенным функциям, получаем теорему.

Теорема 3. *Если λ_h и λ_0 — собственные значения задач* (1) *и* (2) *соответственно, причем $\lambda_h \to \lambda_0$ при $h \to 0$, то из множества $\{u_h\}$ равномерно ограниченных собственных или присоединенных функций, соответствующих собственным значениям λ_h, можно выделить последовательность, сходящуюся к собственной или присоединенной функции, соответствующей собственному значению λ_0.*

Повторяя почти дословно рассуждения работы [7], где вопрос об аппроксимации собственных и присоединенных функций решается для обыкновенного дифференциального оператора с помощью принадлежащего М. В. Келдышу [8] разложения главной части резольвенты в окрестности полюса, получим следующее утверждение.

Теорема 4. *Каждая собственная и присоединенная функция задачи* (2), *соответствующая собственному значению λ_0, может быть получена как предел последовательности собственных или присоединенных функций задачи* (1), *соответствующих последовательности собственных значений, сходящейся к λ_0.*

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
28 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, Уравнения с частными производными, М., 1966. [2] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, Математические заметки, 7, № 4, 495 (1970). [3] Ю. Н. Валицкий, Информ. бюлл. Численные методы механики сплошной среды. 1, № 1, 31 (1970). [4] J. H. Bramble, V. Thomée, SIAM J. Numer. Anal., 6, № 4, 583 (1969). [5] И. И. Привалов. Интегральные уравнения, М., 1937. [6] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, М., 1957. [7] Ю. Н. Валицкий, Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 9, № 1, 108 (1969). [8] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1, 11 (1951).