Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 519.44 МАТЕМАТИКА

В. А. ВЕДЕРНИКОВ

О ГРУППАХ С ОПРЕДЕЛЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ ДЛЯ ПОДГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 11 XI 1970)

1. В теории конечных групп пока остаются нерешенными следующие вопросы. 1) Будет ли конечная группа G разрешимой, если G содержит максимальную подгруппу H, имеющую нечетный порядок, и нормализатор в G каждой силовской подгруппы из H, не инвариантной в H (в G), содержится в H? 2) Будет ли конечная группа G разрешимой, если для каждого нечетного простого числа p, делящего порядок G, в группе G существует p-дополнение (известная задача)?

Положительно вопрос 1) решен Томпсоном (1) в частном случае, когда максимальная подгруппа H нильпотентная. В настоящей работе получены результаты, относящиеся к вопросам 1) и 2), причем теоремы 2.1 — 2.5 усиливают отмеченный результат Томпсона. Отметим, что вопрос 2) тесно связан с известной задачей описания всех конечных групп, порядок которых делится ровно на три различных простых числа.

Наряду с результатами, относящимися к вопросу 2), в п. 3 содержится теорема 3.4, которая распространяет теорему 5 из работы (3) на бесконечные группы. Применяя теорему 3.4 и вытекающие из нее следствия, получаем характеризацию конечных сверхразрешимых групп.

Существует предположение, что если порядок g конечной нециклической простой группы G делится на степень простого числа p^n, то тогда $g > p^{2n}$. В работе (2) это показано в случае, когда конечная группа G содержит неинвариантную абелеву p-силовскую подгруппу. В п. 4 результаты из (2) несколько усиливаются.

В дальнейшем используются следующие обозначения и определения: G — всегда, если не оговорено, конечная группа; $|H|$ — порядок группы H; H_G — максимальная инвариантная подгруппа группы G, содержащаяся в H; $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G; $A \times B$ — прямое произведение групп A и B; G_p — p-силовская подгруппа группы G; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G; $Z(G)$ — центр группы G; $J(G)$ — подгруппа Томпсона (5). Группа H называется p-разложимой, если $H = H_p \times T$. Группа, все подгруппы которой инвариантны, называется дедекиндовой.

Приведем полученные результаты.

2. В этом параграфе устанавливаются признаки разрешимости конечных групп, содержащих максимальную подгруппу с определенными свойствами.

Теорема 2.1. *Пусть H — разрешимая максимальная подгруппа группы G и H_2 имеет класс не более 2. Если для каждой неинвариантной в G силовской подгруппы P из H имеем $N_G(P) = P \times T \subseteq H$, то группа G разрешима.*

Теорема 2.2. *Пусть H — разрешимая максимальная подгруппа группы G и H_2 имеет класс не более 2. Если H содержит не менее двух неинвариантных силовских подгрупп различных порядков, причем для каждой неинвариантной в H силовской подгруппы P из H имеем $N_G(P) = P \times T \subseteq H$, то группа G разрешима.*

Теорема 2.3. *Пусть H — максимальная подгруппа группы G, $|H|$ нечетен и H содержит неинвариантные лишь p-силовские подгруппы. Если выполняется одно из условий: 1) для любой неинвариантной в G нецикли-*

ческой подгруппы Q из H_p имеем $N_G(Q) \subseteq N_G(H_p) \subseteq H$, 2) $N_G(Z(J(H_p)))$ p'-замкнут, то группа G разрешима.

При доказательстве теоремы 2.1 — 2.3 существенно используется

Лемма 2.4. *Тогда и только тогда для каждого простого делителя p порядка разрешимой группы G нормализатор p-силовской подгруппы p-разложим, когда группа G нильпотентна.*

Замечание. По-видимому, в лемме 2.4 условие разрешимости можно опустить.

Теорема 2.5. *Пусть H — максимальная подгруппа группы G, содержащая некоторую G_2. Если H 2-разложима и для любой нециклической 2-подгруппы Q из H, неинвариантной в H, имеем $N_G(Q) \subseteq H$, то группа G разрешима.*

Следствие 1. *Пусть H — нильпотентная максимальная подгруппа группы G. Если для любой нециклической 2-подгруппы Q из H, неинвариантной в H, имеем $N_G(Q) \subseteq H$, то группа G разрешима.*

Следствие 2. *Пусть H — максимальная подгруппа группы G, содержащая некоторую G_2. Если H 2-разложима и каждая нециклическая подгруппа из G_2 инвариантна в G_2, то группа G разрешима.*

Отметим, что конечные и бесконечные группы с инвариантными нециклическими подгруппами исследовались в ряде работ Ф. Н. Лиманом (см., например, ([4])).

Теоремы 2.1—2.5 и их следствия обобщают теорему Томпсона из ([1]) о разрешимости конечных групп, содержащих нильпотентную максимальную подгруппу нечетного порядка.

3. Установим признаки разрешимости конечной группы G, у которой та или иная совокупность собственных примарных подгрупп дополняема в G.

Теорема 3.1. *Если в конечной группе G все недостижимые нециклические 2-подгруппы дополняемы, то G разрешима.*

Теорема 3.2 *Если в конечной группе G все недостижимые примарные подгруппы нечетного порядка дополняемы, то группа G разрешима.*

Теорема 3.3. *Если все неинвариантные p-силовские подгруппы, соответствующие нечетным простым делителям p порядка конечной группы G, циклические и дополняемы в G, то группа G разрешима.*

Замечание. При доказательстве теорем 3.1—3.3 результат Томпсона об N-группах (см. ([5])) не использовался.

Следующей теоремой устанавливается критерий дополняемости инвариантной подгруппы в группе.

Теорема 3.4. *Пусть K — инвариантная подгруппа конечной или бесконечной группы G и $K \cap \Phi(G) = \mathfrak{D}$. Если $K / \mathfrak{D}$ — конечная нильпотентная группа, то в группе G существует подгруппа H такая, что $G = H \cdot K$ и $H \cap K = \mathfrak{D}$.*

Следствие 1. *Пусть K — конечная нильпотентная инвариантная подгруппа конечной или бесконечной группы G. Если $K \cap \Phi(G) = \{1\}$, то подгруппа K дополняема в группе G.*

Следствие 2. *Если $\Phi(G) = \{1\}$, то каждая конечная нильпотентная инвариантная подгруппа дополняема в конечной или бесконечной группе G.*

Применяя теорему 3.4, нетрудно получить следующую характеризацию конечных сверхразрешимых групп.

Теорема 3.5. *Конечная группа G с подгруппой Фраттини $\Phi(G)$ тогда и только тогда сверхразрешима, когда фактор-группа $G / \Phi(G) = \overline{G} = \overline{A} \cdot F(\overline{G})$, причем $\overline{A} \cap F(\overline{G}) = \{1\}$, $\overline{A}$ абелева, а $F(\overline{G})$ — группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами и к каждой циклической подгруппе из $F(\overline{G})$ существует дополнение в $F(\overline{G})$, инвариантное в группе $\overline{G}$.*

4. При исследовании конечных групп, обладающих подгруппой с определенными свойствами, иногда полезно установить верхнюю или нижнюю

границу для порядков групп, связанную с порядком данной подгруппы. В этом направлении получены следующие теоремы.

Теорема 4.1. *Пусть группа G содержит неинвариантную холловскую дедекиндову подгруппу H.*

Тогда

$$|G| \geqslant |H| \left(\frac{|H| + |H_G|}{|H_G|} \right).$$

В частности, если $H_G = \{1\}$, то $|G| \geqslant |H| (|H| + 1)$.

Теорема 4.2. *Пусть группа G содержит неинвариантную π-силовскую дедекиндову подгруппу H и $H_G = \{1\}$. Если G не обладает инвариантной подгруппой N такой, что G / N является π-группой, то $|G| \geqslant 2|H| (|H| + 1)$.*

При доказательстве теорем 4.1 — 4.2 используется

Лемма 4.3. *Пусть в группе G существует неинвариантная дедекиндова π-силовская подгруппа G_π.*

Тогда пересечение всех π-силовских подгрупп группы G представимо как пересечение G_π с некоторой своей сопряженной.

Остается пока открытым вопрос: «Нельзя ли в теоремах 4.1 — 4.2 дедекиндовость подгруппы H заменить нильпотентностью?»

Орский филиал
Всесоюзного заочного политехнического института

Поступило
17 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. G. Thompson, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 45 (1963). [2] J. S. Brodkey, Proc. Am. Math. Soc., 14, № 1 (1963). [3] В. А. Ведерников, Матем. заметки, 3, № 2 (1968). [4] Ф. Н. Лиман, Матем. заметки, № 1 (1968). [5] D. Gorenstein, Finite Groups, 1968.