Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 513.881:519.4 МАТЕМАТИКА

Ю. М. ВУВУНИКЯН

ПОРОЖДЕНИЕ ПОЛУГРУПП-ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 9 XI 1970)

1. В этой работе мы распространяем теорему порождения полугрупп-обобщенных функций ([1], [2]) в банаховых пространствах на случай локально выпуклого пространства и приводим теорему порождения для полугрупп-мер.

Теоремы порождения в ([1], [2]) даются с помощью условия на рост резольвенты инфинитезимального оператора в области комплексного переменного, содержащей достаточно большие $\operatorname{Re}\lambda$. Однако в локально выпуклом пространстве инфинитезимальный оператор, вообще говоря, не имеет резольвенты. Причина этого и, следовательно, того, что не переносятся теоремы порождения, известные для банахова случая, заключается в том, что пространство эндоморфизмов ненормируемого локально выпуклого пространства, снабженное любой топологией равномерной сходимости на совокупности ограниченных множеств, не является локально выпуклой алгеброй. Поэтому мы характеризуем полугруппу T с помощью векторнозначных аналитических функций $C(\mu_n e^{-\lambda(\cdot)})$ и обобщенного преобразования Лапласа ([3]) на специально введенных пространствах векторнозначных обобщенных функций.

2. Пусть K — пространство бесконечно дифференцируемых функций на R^1, с компактными носителями, снабженное обычной топологией ([4]), X, Y — квази-полные локальные выпуклые пространства, $L(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в Y, снабженное топологией равномерной сходимости, $R_+ = [0, +\infty)$.

Определение 1. Последовательность $(\mu_n)_{n=0}^{\infty}$ мультипликаторов из K в K называется сохраняющей, если выполнены условия:

a) $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mu_n K = K$;

b) $\mu_n K \subset \mu_{n+1} K \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

c) $\mu_n(0) = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

d) носитель каждого μ_n связен.

Напомним, что полугруппой-обобщенной функцией T в пространстве X называется $L(X, X)$-значная обобщенная функция ([5]) с носителем на R_+ (т. е. $T \in K'_{R_+}L(X, X))$), удовлетворяющая условиям:

I. $T(\varphi * \psi) = T(\varphi) T(\psi)$ для всех $\varphi, \psi \in K_{R+}$;

II. Множество $T(K_R^+) X$ фундаментально в X.

Определим $Tx \in K_R^+(X)$ равенством

$$(Tx)(\varphi) = T(\varphi) x \quad \text{для любого} \quad \varphi \in K.$$

III. Если сужение $Tx|_{K_{R_+}} = 0$, то $x = 0$.

IV. Пусть $y \in T(K_{R+})X$. Тогда T_y является регулярной функцией на R^1, равной нулю вне R_+.

Заметим, что из I и IV следует, что если $y = T(\varphi)x \quad (\varphi \in K_{R_+}, x \in X)$, то

$$T y = \begin{cases} T(S_{-t}\varphi)x, & \text{если } t \in R_+; \\ 0, & t \notin R_+, \end{cases}$$

где S_τ — оператор, определяемый соотношением

$$S_\tau\varphi(s) = \varphi(s+\tau), \quad \tau \in R^1.$$

Следовательно, $T(s_{-t}\varphi)x$ является бесконечно дифференцируемой по t на R_+. Отметим также, что в силу условия I операторы, определяемые соотношениями

$$T_t y = T(S_{-t}\varphi)x,$$

обладают на $T(K_{R_+})X$ полугрупповым свойством

$$T_{t+s} = T_t T_s \quad \text{для всех} \quad t, s \in R_+.$$

Пусть

$$\mathscr{D}(A) = \{x \in X \mid \text{существует } y, \text{ что } T'x = Ty \text{ на } K_{R_+}\}.$$

В силу III такой y единствен. Определим на $\mathscr{D}(A)$ оператор A равенством

$$Ax = y.$$

Оператор A с областью определения $\mathscr{D}(A)$ называется инфинитезимальным оператором. Легко видеть, что он замкнут.

В силу II $\mathscr{D}(A)$ всюду плотно в X. Более того, имеет место

Лемма 1. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \mathscr{D}(A^k)$ *плотно в* X.

Пусть $f \in \varinjlim K'_{[n,+\infty)}(X)$ — строгому индуктивному пределу пространств $K'_{[n,+\infty)}(X)$, n — целое. Возьмем $\varphi \in K$ и рассмотрим функцию

$$g(t) = f(S_t\varphi).$$

Ясно, что $\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp}\varphi - \operatorname{supp} f$. Следовательно, g — бесконечно дифференцируемая функция, финитная справа.

Мультипликативное произведение ([6]) $T \odot g$ определено и является финитной обобщенной функцией.

Определение 2. $(T * f)(\varphi) = (T \odot g)(e)$, где e — функция, тождественно равная единице на R^1.

Лемма 2. *Оператор свертки* $f \to T * f$ *является эндоморфизмом пространства* $\varinjlim K'_{[n,+\infty]}(X)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$B\colon\ g \to P_A * g,$$

где $P_A = (\delta' \otimes I) - (\delta \otimes A)$, действующий из $\varinjlim K'_{[n,+\infty)}(\mathscr{D}(A))$ ($\mathscr{D}(A)$ наделено топологией графика) в $\varinjlim K'_{[n,+\infty)}(X)$.

Лемма 3. *Пусть* A — *инфинитезимальный оператор полугруппы-обобщенной функции* T.

Тогда существует B^{-1} *и* $B^{-1}f = T * f$ *для любого* $f \in \varinjlim K'_{[n,\infty)}(X)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать сохраняющую последовательность из бесконечно дифференцируемых финитных справа функций.

Всякой функции $\varphi \in \mu_n K$ сопоставим функцию $\psi \in K_{(\alpha,\beta]}$, где $\alpha = \inf\operatorname{supp}\mu_n$, $\beta = \max\operatorname{supp}\mu_n$ так, чтобы $\varphi = \mu_n\psi$. Покажем, что это отображение ω_n однозначно. Действительно, пусть $\psi, \psi_0 \in K_{(\alpha,\beta]}$ и $\mu_n\psi = \mu_n\psi_0$, но в силу d) $\mu_n(t) \neq 0$ для любого t из (α, β). Следовательно, $\psi = \psi_0$ на (α, β) и в силу непрерывности $\psi = \psi_0$ в $K_{(\alpha,\beta]}$. Более того, ω_n — изоморфизм.

Пусть теперь $\tilde{\varphi}(\lambda) = \int\limits_{R^1} e^{\lambda t}\varphi(t)\,dt.$ Рассмотрим пространства $(\mu_n K)'_{k+}(X) = X_n$. Определим обобщенное преобразование Лапласа ([3])

на X_n, которое обозначим через L_n:

$$(L_n f)(\tilde{\varphi}) = f(\varphi) \quad \text{для любого} \quad \varphi \in \mu_n K.$$

Определение 3. Пусть функция $g(\lambda)$ принадлежит $L_n(X_n) = Y_n$ и является аналитической в области $\operatorname{Re}\lambda > 0$, и пусть $g(\tilde{\varphi}) =$ $= (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\partial\Lambda_a} \widetilde{(\omega_n\varphi)}(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda$ для любой $\varphi \in \mu_n K$, где $\Lambda_a = \{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > a\}$, $a > 0$, и интеграл не зависит от выбора a. Тогда $g(\lambda)$ называется μ_n-представлением элемента $g \in Y_n$.

Наконец, введем операторы

$$\Omega_n f = f \circ \omega_n^{-1} \quad \text{для любого} \quad f \in X_n$$

и основные в этой теории операторы $C_n g = L_n \Omega_n^{-1} B \Omega_n L_n^{-1} g$ для любого $g \in Y_n$.

Теорема 1. *Пусть X — квази-полное бочечное л.в.п., (μ_n) — сохраняющая последовательность бесконечно дифференцируемых финитных функций. Чтобы линейный замкнутый оператор A с плотной в X областью определения, действующий в X, был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы-обобщенной функции T, необходимо и достаточно, чтобы для $n = 0, 1, 2, \ldots$ в пространстве Y_n выполнялись условия:*

1) *существует C_n^{-1} непрерывный;*

2) *существует $G(\lambda)$ с областью определения $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ и со значением в $L(X, X)$ такая, что для любого $x \in X$:*

a) *$G(\lambda)x$ — аналитическая функция на $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$;*

b) *$G(\lambda)x$ является μ_n-представлением элемента $L_n\Omega_n L_n^{-1} C_n^{-1}(1 \otimes x)$;*

c) *множество $\{(1 + |\lambda|)^{-m} G(\lambda)x \mid \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ ограничено в X для некоторого натурального m.*

Доказательство. 1) Необходимость. Пусть T — полугруппа-обобщенная функция. Положим $G(\lambda) = (\mu_n T)(e^{-\lambda(\cdot)}) = T(\mu_n e^{-\lambda(\cdot)})$, $\operatorname{Re}\lambda >$ > 0. Так как $\mu_n e^{-\lambda(\cdot)} \in K$, то $G(\lambda) \in L(X, X)$. Условие 2a, очевидно, выполняется. По леммам 2 и 3 существует B^{-1} непрерывный и, следовательно, существует $C_n^{-1} = L_n \Omega_n^{-1} B^{-1} \Omega_n L_n^{-1}$, непрерывный в Y_n, т. е. условие 1) выполнено.

2b) Для любой $\varphi \in \mu_n K$

$$\varphi(t) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\partial\Lambda_a} \mu_n e^{-\lambda t}\, \widetilde{(\omega_n\varphi)}(\lambda)\, d\lambda, \tag{1}$$

где интеграл не зависит от выбора $a > 0$. С другой стороны, имеем

$$L_n \Omega_n L_n^{-1} C_n^{-1}(1 \otimes x) = L_n(Tx), \tag{2}$$

так как $\Omega_n(\delta \otimes x) = \delta \otimes x$ в силу условия c) определения сохраняющей последовательности. Наконец, применяя теорему Пэли — Винера, получим c), так как $\operatorname{supp}(\mu_n T) \subset [0, \max \operatorname{supp} \mu_n]$.

2) Достаточность. Положим для любых $\varphi \in \mu_n K$, $x \in X$

$$(Tx)(\varphi) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\partial\Lambda_a} \widetilde{(\omega_n\varphi)}(\lambda)\, G(\lambda)\, x\, d\lambda.$$

В силу условия 2c этот интеграл абсолютно сходится и не зависит от выбора $a > 0$. Так как пространство бочечно, то T — $L(X, X)$-значная обобщенная функция. По условиям 1 и 2b имеем

$$(Tx)(\varphi) = [B^{-1}(\delta \otimes x)](\omega_n\varphi),$$

но $\mu_n(0) = 1$, следовательно,

$$Tx = B^{-1}(\delta \otimes x),$$

откуда следует, что T — полугруппа-обобщенная функция и A — ее инфинитезимальный оператор.

3. Пусть K^p ($p = 0, 1, 2, \ldots$) — пространство финитных p раз непрерывно дифференцируемых функций, снабженное индуктивной топологией.

Определение 4. Пусть A_0 — линейный непрерывный оператор из K^0 в $L(X, X)$ с носителем на R_+. T называется полугруппой-мерой, если для нее выполнены условия I, III, IV, определение полугруппы-обобщенной функции с заменой K на K^0 и условие III с заменой K на K^1.

Инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы-меры T естественно определить следующим образом:

$$A_0 y = \lim_{t \to +0} t^{-1} (T(S_{-t}\varphi) x - T(\varphi) x)$$

для любого $y = T(\varphi)x$ ($\varphi \in K^0$, $x \in X$) такого, что предел существует.

Теорема 2. *Пусть* (μ_n) — *сохраняющая последовательность финитных справа непрерывных функций. Чтобы замкнутый линейный оператор* A_0 *с плотной областью определения был инфинитезимальным оператором полугруппы-меры, необходимо с* $m = 0$ *и достаточно с* $m < -1$ *выполнение условий теоремы* 1.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. Г. П. Акилову за постоянное внимание к работе.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
2 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. L. Lions, Portugal. Math., 19 (1960). [2] J. Chazarain, C. R., Sér. A, 266, № 1 (1968). [3] T. Kōmura, J. Funct. Anal., 2, № 3 (1968). [4] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, 2, Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958. [5] L. Schwartz, Ann. Inst. Fourier, 7 (1957). [6] L. Schwartz, Ann. Inst. Fourier, 8 (1958).