

Ф. Г. АВХАДИЕВ, Л. А. АКСЕНТЬЕВ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 XII 1970)

1. Пусть $g(t)$ — мероморфная в области \mathcal{D} функция, $\{g, t\} = [g''(t)/g'(t)]' - [g''(t)/g'(t)]^2/2$ — шварцман. Нехари ⁽¹⁾ доказал следующее. Если функция $g(t)$ неоднолистка, т. е. $g(t_1) = g(t_2)$ для некоторых t_1 и $t_2 \in \mathcal{D}$, $t_1 \neq t_2$, то найдется нетривиальное решение $u_0(t)$ уравнения

$$u''(t) + \frac{1}{2}\{g, t\}u(t) = 0, \quad (N)$$

обращающееся в нуль в тех же точках t_1 и t_2 . Пусть $p(t)$ регулярна в \mathcal{D} . Полагая $w(t) = u(t) \exp \int [p(t)/2] dt$, получим новое уравнение

$$w''(t) + p(t)w'(t) + q(t)w(t) = 0 \quad (1)$$

с регулярными в \mathcal{D} коэффициентами $p(t)$ и $q(t)$, удовлетворяющими условию

$$-p'(t) - p^2(t)/2 + 2q(t) = \{g, t\}. \quad (2)$$

(см. также ⁽²⁾, стр. 300). Считая $w_0(t) = u_0(t) \exp \int [p(t)/2] dt$, получим, что $w_0(t) \neq 0$ и $w_0(t_1) = w_0(t_2) = 0$. Поэтому исследование однолиственности функции $g(t)$ сводится к исследованию неколеблемости решения уравнения (1) с условием (2). Используя уравнение (N), Нехари получил достаточные условия однолиственности, выражающиеся через шварцман (см. ^(1, 3, 4)). Мы найдем более простые условия, которые оказываются удобными в приложениях.

Теорема 1. *Регулярная в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ будет однолистной в этом круге, если*

$$|f''(z)/f'(z)| \leq C/(1 - |z|^2), \quad C \leq 2/3, \quad |z| < 1. \quad (3)$$

Доказательство ведется от противного. Пусть $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \neq z_2$, $|z_1| = |z_2| < 1$. Обозначим через $z_0 = r_0 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)/2}$, $0 \leq r_0 < 1$, среднюю точку дуги, ортогональной к $|z| = 1$ окружности, проходящей через z_1 и z_2 . Тогда для функции

$$g(t) = f(z(t)) = f(e^{i\varphi}(t + r_0 i)/(1 - r_0 i t)), \quad |t| < 1,$$

будем иметь

$$g(-\rho) = g(\rho), \quad 0 < \rho < 1.$$

Рассматривая уравнение (1) при

$$p(t) = -\frac{f''(z)}{f'(z)} z'(t), \quad q(t) = -\frac{f''(z)}{2f'(z)} z''(t) \quad (z = z(t))$$

(соотношение (2) для функций $p(t)$, $q(t)$ и $g(t)$ при этом будет выполнено), нетрудно прийти к равенству

$$\int_{-\rho}^{\rho} |w_0'(t)|^2 dt + \int_{-\rho}^{\rho} \frac{f''(z)}{f'(z)} z'(t) w_0'(t) \overline{w_0(t)} dt +$$

$$+ \int_{-\rho}^{\rho} \frac{f''(z)}{2f'(z)} z''(t) |w_0(t)|^2 dt = 0, \quad (4)$$

где $w_0(t)$ — решение уравнения (1) при выбранных $p(t)$ и $q(t)$, причем $w_0(-\rho) = w_0(\rho) = 0$.

Но при выполнении условия (3) равенство (4) невозможно. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\rho}^{\rho} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| |z'(t)| |w_0'(t) \overline{w_0(t)}| dt \leq \frac{2}{3} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{|w_0'(t) w_0(t)|}{1-t^2} dt \leq \\ & \leq \frac{2}{3} \left(\int_{-\rho}^{\rho} |w_0'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\rho}^{\rho} \frac{|w_0(t)|^2}{(1-t^2)^2} dt \right)^{1/2} < \frac{2}{3} \int_{-\rho}^{\rho} |w_0'(t)|^2 dt, \\ & \int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{2} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| |z''(t)| |w_0(t)|^2 dt \leq \frac{1}{3} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{2|w_0(t)|^2}{1-t^2} dt < \frac{1}{3} \int_{-\rho}^{\rho} |w_0'(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Мы здесь воспользовались (при $\lambda = 1$ и 2) неравенствами

$$\int_{-\rho}^{\rho} \frac{2^{2-\lambda} u^2(t)}{(1-t^2)^\lambda} dt < \int_{-\rho}^{\rho} u^2(t) dt, \quad 0 < \rho < 1,$$

справедливыми для $1 \leq \lambda \leq 2$ и любых непрерывно дифференцируемых в интервале $(-1, 1)$ вещественных функций $u(t) \neq 0$, $u(-\rho) = u(\rho) = 0$.

Теорема 2. *Функция $f(\zeta)$, регулярная в области $|\zeta| > 1$ за исключением точки $\zeta = \infty$, где она имеет простой полюс, будет однолистной в $|\zeta| > 1$, если*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \leq C(|\zeta|)/(|\zeta|^2 - |\zeta|), \quad |\zeta| > 1, \quad (5)$$

причем неотрицательная непрерывная при $|\zeta| = R \geq 1$ функция $C(R)$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{R>1} C(R)/2 + \max_{R>1} [C(R)/R] \leq 1. \quad (6)$$

Схема доказательства этой теоремы аналогична предыдущей. Функции $g(t)$, $p(t)$ и $q(t)$ выбираются следующим образом:

$$g(t) = f(1/z(t)), \quad z = z(t) \equiv e^{iv}(t + r_0 i) / (1 - r_0 i t), \quad 0 \leq r_0 < 1,$$

$$p(t) = \frac{f''(1/z)}{z^2 f'(1/z)} z'(t), \quad q(t) = -\frac{f''(1/z)}{z^2 f'(1/z)} \left(z'^2(t) - \frac{z z''(t)}{2} \right).$$

Следствие 1. *Если*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)| \leq C/(|\zeta|^2 - |\zeta|), \quad C \leq 2/3, \quad |\zeta| > 1, \quad (7)$$

то функция $f(\zeta) = a\zeta + a_0 + a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + \dots$ однолистка в $|\zeta| > 1$.

Отметим, что условия (3) и (7) ранее были получены в работах ⁽⁵⁾ и ⁽⁶⁾ соответственно лишь при $C = 2(\sqrt{5}-2) = 0,47\dots$ на основании достаточного условия Нехари ⁽¹⁾.

2. При исследовании однолистной разрешимости основных обратных краевых задач ⁽⁷⁾, гл. 1; ⁽⁸⁾, § 33) нужны условия однолистности, выражающиеся через область изменения производной отображающей функции. В частности, возникает следующая задача. Пусть $m \leq |f'(z)| \leq M$ и $|\arg f'(z)| \leq \alpha$ при $|z| < 1$ или $|z| > 1$. При каких α и $q = \ln(M/m)$ функция $f(z)$ будет однолистной? В следующих теоремах указаны некоторые ограничения на q и α , которые охватывают интересный случай $\alpha > \pi/2$, не исследованный ранее (см. ⁽⁹⁻¹²⁾).

Теорема 3. Регулярная в $|z| < 1$ функция $f(z)$ будет однолистной в $|z| < 1$, если

$$q / [(\lambda + 1)K(\lambda)] \leq 2/3, \quad (8)$$

где $K(\lambda) = \int_0^1 [(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)]^{-1/2} dx$, а $\lambda = \lambda(q, \alpha)$, $0 \leq \lambda \leq 1$,

определяется из уравнения $4\alpha K(\lambda) = qK(\lambda')$, $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$.

Наметим доказательство, которое приводит к оценке

$$|f''(z) / f'(z)| \leq q [(\lambda + 1)K(\lambda)]^{-1} / (1 - |z|^2) \leq 2/3 / (1 - |z|^2), \quad |z| < 1. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию $t = t(z) \equiv \ln f'(z) - \ln m - q/2 + i\alpha$, $|z| < 1$, значения которой лежат в прямоугольнике $|\operatorname{Re} t| \leq q/2$, $0 \leq \operatorname{Im} t \leq 2\alpha$. Отобразим круг $|w| < 1$ на этот прямоугольник с помощью функции ((13), стр. 166)

$$t = \frac{q}{2K(\lambda)} \int_0^{\zeta(w)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}},$$

где $\zeta = \zeta(w) = 2(w+i)/([1-\lambda+i(1+\lambda)]w+1+\lambda+i(1-\lambda))$, причем λ и $K(\lambda)$ — указанные в условии теоремы величины. Определим теперь функцию $w = w(z)$, $|z| < 1$, неявным уравнением

$$\ln f'(z) - q/2 + i\alpha = \frac{q}{2K(\lambda)} \int_0^{\zeta(w)} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}},$$

дифференцирование которого приводит к равенству

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} dz = \frac{q}{\delta K(\lambda)} \frac{2(1+\lambda)}{\sqrt{(w^2-1)(w-a_1)(w-a_2)}} dw, \quad (10)$$

где $\delta^2 = -2(1+\lambda)^2[3-\lambda+i(1+\lambda)][1-3\lambda+i(1+\lambda)]$, а точки a_1 и a_2 лежат на окружности $|w|=1$ и соответствуют точкам (-1) и $1/\lambda$ на плоскости ζ .

Поскольку $|w(z)| < 1$, то по принципу гиперболической метрики справедливо неравенство (см., например, (14), стр. 319)

$$|dw|/(1-|w|^2) \leq |dz|/(1-|z|^2), \quad |z| < 1,$$

или, с учетом (10),

$$\frac{|\delta| K(\lambda)}{2(1+\lambda)q} \frac{\sqrt{|(w^2-1)(w-a_1)(w-a_2)|}}{1-|w|^2} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{1}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1.$$

Но $\frac{\sqrt{|(w^2-1)(w-a_1)(w-a_2)|}}{1-|w|^2} \geq \sqrt{\frac{|a_1-a_2|}{2}} = 2(1+\lambda)^2|\delta|^{-1},$

и окончательно имеем (9). Остается воспользоваться теоремой 1. Предельному случаю этой теоремы с $\lambda = 0$ ($\alpha = \infty$) соответствует

Следствие 2. Регулярная в $|z| < 1$ функция $f(z)$ будет однолистной в $|z| < 1$, если $m \leq |f'(z)| \leq M$, $q = \ln(M/m) \leq \pi/3$.

Результат следствия 2 получен в (15) лишь для $q = \pi(\sqrt{5}-2)$.

Теорема 4. Пусть функция $f(\zeta)$ регулярна в области $|\zeta| > 1$ за исключением точки $\zeta = \infty$, где она имеет простой полюс;

$$m \leq |f'(\zeta)| \leq M, \quad q = \ln(M/m), \quad |\arg f'(\zeta)| \leq \alpha.$$

Тогда $f(\zeta)$ будет однолистной в $|\zeta| > 1$, если

$$q / [(\lambda + 1)K(\lambda)] \leq 1/2, \quad (11)$$

где λ и $K(\lambda)$ определяются так же, как и в теореме 3.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 3. А именно, с использованием (11) получаем неравенство

$$\left| \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \right| \leq \frac{2q [(\lambda+1)K(\lambda)]^{-1}}{|\zeta|^{\lambda-1}} |\zeta| \leq \frac{|\zeta|}{|\zeta|^{\lambda-1}}, \quad |\zeta| > 1,$$

и однолиственность функции $f(\zeta)$ следует из теоремы 2 при $C(R) = (1 + R^{-2})^{-1}$.

Следствие 3. Функция $f(\zeta) = a\zeta + a_0 + a_1\zeta^{-1} + a_2\zeta^{-2} + \dots$ будет однолистной в $|\zeta| > 1$, если выполнено одно из условий:

1°. $m \leq |f'(\zeta)| \leq M$, $q = \ln(M/m) \leq \pi/4$ (предельный случай теоремы 4 с $\lambda = 0$);

2°. $|\arg f'(\zeta)| \leq \alpha \leq \pi/8$ (предельный случай теоремы 4 с $\lambda = 1$).

Утверждения этого следствия получены в (15) лишь при $q \leq \pi(\sqrt{5}-2)/2$ и $\alpha \leq \pi(\sqrt{5}-2)/4$.

Достаточные условия однолиственности решения внутренней (внешней) обратной краевой задачи ((7), гл. 1; (8), § 33) сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 5. Функция

$$f(z) = \int \exp \left\{ \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \right) \right\} dz$$

будет однолистной в области $|z| < 1$ ($|z| > 1$), если вещественная 2π -периодическая функция $p(\theta)$ удовлетворяет двум условиям:

1) $|p(\theta_1) - p(\theta_2)| \leq N|\theta_1 - \theta_2|^\nu$, $0 < \nu \leq 1$;

2) $|p(\theta_1) - p(\theta_2)| \leq q (\leq N\pi^\nu)$,

где величины q и

$$\alpha = N \frac{2^\nu}{\pi} \int_0^{\tau_0} \frac{\tau^\nu}{\sin \tau} d\tau + \frac{q}{\pi} \ln \operatorname{ctg} \frac{\tau_0}{2} \quad (\tau_0 = 2^{-1}q^{1/\nu}N^{-1/\nu}) \quad (12)$$

удовлетворяют предположениям теоремы 3 (теоремы 4).

Доказательство основано на теореме 3 (4), на представлении $\ln |f'(e^{i\theta})| = p(\theta)$ и на оценке $|\arg f'(e^{i\theta})| \leq \alpha$, где $\alpha = \alpha(N, q, \nu)$ имеет вид (12). Оценка $|\arg f'(e^{i\theta})| \leq \alpha$ при $q = N\pi^\nu$ получена в (16), случай $q < N\pi^\nu$ доказывается аналогично.

Авторы глубоко благодарны проф. Н. А. Лебедеву за ценные советы.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
29 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Z. Nehari, Bull. Am. Math. Soc., 55, № 6, 545 (1949). ² В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950.
³ Z. Nehari, Proc. Am. Math. Soc., 5, 700 (1954). ⁴ Z. Nehari, Lect. Funct. Complex Variable, Ann. Arbor, 1955, p. 49. ⁵ P. L. Duren, H. S. Shapiro, A. L. Shields, Duke Math. J., 33, № 2, 247 (1966). ⁶ Ф. Г. Авхадиев, ДАН, 190, № 3, 495 (1970). ⁷ Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужиц, Обратные краевые задачи и их приложения, Казань, 1965. ⁸ Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. ⁹ В. А. Зморевич, УМН, 9, в. 4, 175 (1954). ¹⁰ В. С. Рогожин, Уч. зап. физ.-матем. фак. унив. Ростов-на-Дону, 32, 4, 135 (1955). ¹¹ Л. А. Аксентьев, УМН, 15, в. 6, 119 (1960). ¹² С. Н. Кудряшов, Тр. семинара по обратным краевым задачам, Казань, в. 2, 1964, стр. 72. ¹³ Н. И. Ахизер, Элементы теории аналитических функций, М., 1970. ¹⁴ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966. ¹⁵ Ф. Г. Авхадиев, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 11, 3 (1970). ¹⁶ Л. А. Аксентьев, Там же, № 3, 3 (1968).