Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 539.3 **ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ**

А. Н. ГУЗЬ, Ф. Г. МАХОРТ

ОБ ОПИСАНИИ ВЛИЯНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ НА СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН

(Представлено академиком Л. И. Седовым 9 XI 1970)

Рассмотрим упругое тело с начальными деформациями, для описания которых применим теорию конечных деформаций. Выясним вопрос: какой должна быть структура упругого потенциала для изотропного тела, чтобы можно было хотя бы качественно описать влияние начальных деформаций на скорости распространения малых возмущений, полученных из экспериментальных исследований [3–6]. Тело отнесем к лагранжевым координатам, которые в недеформированном теле совпадают с декартовыми и будем использовать тензор деформации Грина. Величины, характеризующие начальное состояние, будем отмечать индексом нуль. Дифференцирование обозначим индексами после запятой, по всем повторяющимся индексам, за исключением индексов m и j, во всей статье производится суммирование от 1 до 3.

1. Линеаризованные уравнения движения [1, 2] запишем в виде

$$[\overset{*}{\sigma}_{in}(\delta_{nm}+u^{0}_{m,n})+\overset{*0}{\sigma}_{in}u_{m,n}]_{,i}-\rho\ddot{u}_{m}=0. \qquad (1,1)$$

Здесь u_m и σ_{in}^{*} — возмущения перемещений и обобщенных [2] напряжений; u_m^0 и σ_{in}^{*0} — значения этих величин в невозмущенном состоянии; ρ — плотность среды в недеформированном состоянии.

Пусть начальное деформированное состояние будет однородным, которое определим следующим образом:

$$u^{0}_{m}=(\lambda_m-1)\,x_m. \qquad (1,2)$$

Будем считать, что упругий потенциал Φ для изотропного тела есть функция трех алгебраических инвариантов I_1, I_2, I_3. Тогда линеаризованные соотношения упругости для случая начальной однородной конечной деформации [1, 2] запишутся в виде

$$\overset{*}{\sigma}_{ij}=\delta_{ij}a_{ik}\lambda_k u_{k,k}+(1-\delta_{ij})\,G_{ij}\,(\lambda_i u_{i,j}+\lambda_j u_{j,i}); \qquad (1,3)$$

$$a_{ik}=\left[\delta_{t1}+\delta_{t2}\,(\lambda_k^2-1)+3\delta_{t3}\left(\frac{\lambda_k^2-1}{2}\right)^2\right]\left[\frac{\partial^2\Phi^0}{\partial I_1^0\partial I_t^0}+(\lambda_i^2-1)\frac{\partial^2\Phi^0}{\partial I_2^0\partial I_t^0}+3\left(\frac{\lambda_i^2-1}{2}\right)^2\frac{\partial^2\Phi^0}{\partial I_3^0\partial I_t^0}\right]+\left[2\frac{\partial\Phi^0}{\partial I_2^0}+3\,(\lambda_i^2-1)\frac{\partial\Phi^0}{\partial I_3^0}\right]\delta_{ik},\quad t=1,2,3; \qquad (1,4)$$

$$G_{ij}=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial\Phi^0}{\partial I_2^0}+3\,\frac{\lambda_i^2+\lambda_j^2-2}{2}\,\frac{\partial\Phi^0}{\partial I_3^0}\right). \qquad (1,5)$$

Подставляя соотношения (1,3) в уравнения движения (1,1), получим уравнение движения в перемещениях

$$L_{mj}u_j=0. \qquad (1,6)$$

Здесь введены обозначения:

$$L_{mj} = \delta_{im} a_{ij} \lambda_j \lambda_m \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + (1 - \delta_{jm}) G_{jm} \lambda_j \lambda_m \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_m} +$$
$$+ (1 - \delta_{im}) G_{im} \delta_{jm} \lambda_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} + \overset{*0}{\sigma}_{ii} \delta_{jm} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} - \rho \delta_{jm} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad (1{,}7)$$

a_{ij} и G_{ij} определяются выражениями (1,4), (1,5).

2. Пусть в идеально упругом изотропном теле, подвергнутом чисто свободным конечным деформациям, распространяется плоская волна

$$u_j = \hat{u}_j e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}, \qquad j = 1, 2, 3, \qquad (2{,}1)$$

где $\mathbf{k}$ — волновой вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, ω — частота.

Подставляя выражения (2,1) в (1,6), получаем характеристическое уравнение для определения скоростей распространения плоских волн в данном направлении:

$$|b_{mj} - \rho\omega^2 \delta_{mj}| = 0, \qquad (2{,}2)$$

где

$$b_{mj} = \delta_{im} a_{ij} \lambda_j \lambda_m k_i k_j + (1 - \delta_{jm}) G_{jm} \lambda_j \lambda_m k_j k_m +$$
$$+ (1 - \delta_{im}) G_{im} \delta_{jm} \lambda_j^2 k_i^2 + \overset{*0}{\sigma}_{ii} \delta_{jm} k_i^2. \qquad (2{,}3)$$

С целью получения конкретных результатов рассмотрим случай, когда тело загружено только вдоль оси Ox_3, а плоская волна распространяется в направлении Ox_1, перпендикулярном действию напряжений. Тогда характеристические уравнения (2,2) вырождаются в три уравнения:

$$b_{11} - \rho\omega^2 = 0; \qquad (2{,}4)$$

$$b_{22} - \rho\omega^2 = 0, \quad b_{33} - \rho\omega^2 = 0, \qquad (2{,}5)$$

где

$$b_{11} = a_{11} \lambda_1^2 k_1^2, \quad b_{22} = G_{12} \lambda_2^2 k_1^2, \quad b_{33} = G_{13} \lambda_2^2 k_1^2. \qquad (2{,}6)$$

Из выражений (2,4), (2,5), учитывая (2,6), получаем три скорости распространения плоской волны в направлении Ox_1. Одна из них определяет скорость волны расширения, две упругих — скорости волны сдвига:

$$\rho c_{lx_1}^2 = \lambda_1^2 a_{11}; \qquad (2{,}7)$$

$$\rho c_{sx_2}^2 = \lambda_2^2 G_{12}, \quad \rho c_{sx_3}^2 = \lambda_3^2 G_{13}. \qquad (2{,}8)$$

Здесь c_{lx_1} — скорость продольной волны; c_{sx_2} и c_{sx_3} — скорость волны сдвига, когда частицы смещаются соответственно в направлении оси Ox_2 и Ox_3.

3. Из анализа экспериментальных исследований [3, 4, 6] следует, что при сжатии (λ_3 уменьшается, а λ_2 увеличивается) величина c_{sx_2} уменьшается, а c_{sx_3} увеличивается. Из формулы (2,8) следует, что c_{sx_2} может уменьшаться (при увеличении λ_2), а c_{sx_3} может увеличиваться (при уменьшении λ_3) только за счет изменения величин G_{12} и G_{13}, причем $G_{12} \neq G_{13}$. Если же эти величины (G_{12} и G_{13}) равны между собой, то нельзя будет объяснить экспериментально обнаруженное явление, придем в этом случае к выводам противоположного характера. К аналогичным выводам можно прийти, анализируя экспериментальные данные, полученные при растяжении [5].

Выясним, какие ограничения на форму упругого потенциала дают условия $G_{12} \neq G_{13}$. Из выражения (1,5) получаем, что в случае $\Phi = \Phi(I_1, I_2)$, где Φ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, следует $G_{12} \equiv G_{13}$. Таким образом, только предполагая зависимость упругого потенциала от третьего алгебраического инварианта I_3, можем (1,5) удовлетворить условию $G_{12} \neq G_{13}$, а следовательно, получить возможность для объяснения экспериментально обнаруженного эффекта. Поскольку любые первые два инварианта тензора Грина выражаются только через первые два алгебраических инварианта, то приходим к следующему выводу.

Только учет зависимости упругого потенциала от третьего инварианта может объяснить в рамках изотропного тела закономерности распространения малых возмущений в телах с начальными деформациями.

Этот результат получен в рамках теории конечных деформаций, к аналогичному выводу можно прийти и в рамках теории малых деформаций.

Полученные результаты объясняют, почему к описанию закономерностей распространения волн (малых возмущений) в телах с начальными деформациями привлекают ([7]) простейшую форму упругого потенциала, содержащую третий инвариант, — потенциал Мурнагана ([8]).

Институт механики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
30 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. S. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 211, 1104, 7 (1952). [2] В. В. Новожилов, Основы нелинейной теории упругости, М., 1948. [3] R. T. Smith, Ultrasonics, 1, 3, 135 (1963). [4] D. U. Grecraft, Nature, 195, 1193 (1963). [5] О. И. Гуща, В. К. Лебедев, Прикладная механика, 4, 2, 89 (1968). [6] A. U. Meitler, A. H. Fitch, J. Appl. Phys., 40, 4, 1614 (1969). [7] D. S. Hughes, J. L. Kelly, Phys. Rev., 92, № 5, 1145 (1953). [8] F. D. Murnaghan, Finite Deformation of an Elastic Solid, N. Y., 1951.