Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 512.25

МАТЕМАТИКА

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ

К ТЕОРИИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 XI 1970)

В [1-3] предложен метод φ решения широкого класса задач дискретной оптимизации, основанный на построении последовательности планов вспомогательной задачи в порядке ухудшения оценочной функции (миноранты или мажоранты). В настоящей работе излагается модификация этого метода (метод $\bar{\varphi}$), сущность которой состоит в построении последовательности планов (в том же порядке) с пропуском заведомо неоптимальных. Оказывается, в схему нового метода $\bar{\varphi}$ вкладываются известные методы решения задач целочисленного линейного программирования — метод отсечения (Гомори) и метод ветвей и границ (Лэнд и Дойг). Показано также, как метод $\bar{\varphi}$ можно применить для эффективного решения задач линейного программирования с булевыми переменными и неотрицательными коэффициентами ограничений.

Начнем с общей схемы метода $\bar{\varphi}$ решения задачи $\mathfrak{A}$ максимизации функции $F(x)$ на конечном множестве P.

Метод $\bar{\varphi}$ применим к решению задачи $\mathfrak{A}$, если выполняются условия:

1) можно найти расширение R (конечное или бесконечное) множества P ($R \supseteq P$) и функцию $Q(x)$, определенную на R и являющуюся мажорантой функции $F(x)$, т. е. $Q(x) \geqslant F(x)$ для $x \in P$;

2) можно построить алгоритм φ, который на k-м шаге ($k = 1, 2, \ldots$) эффективно находит элемент $r_k \in R$, обладающий свойством

$$Q(r_k) = \max_{x \in R_k} Q(x),$$

где $R_1 = R$, $R_k = R_{k-1} \setminus R(r_{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots$ Здесь $r_{k-1} \in R(r_{k-1}) \subset R$. Кроме того, если $r_{k-1} \in P$, то

$$F(r_{k-1}) = \max_{x \in R(r_{k-1}) \cap P} F(x),$$

а если $r_{k-1} \overline{\in} P$, то $R(r_{k-1}) \cap P = \phi$.

Для последовательности $r_1, r_2, \ldots$ справедлив

Критерий оптимальности. *Если существует такое натуральное число k, что $P_k = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\} \cap P \neq \phi$ и*

$$Q(r_k) \leqslant \max_{x \in P_k} F(x) = F(p^*), \tag{1}$$

то p^* — оптимальный элемент задачи $\mathfrak{A}$.

Поэтому k-й шаг метода $\bar{\varphi}$ решения задачи $\mathfrak{A}$ состоит в следующем. С помощью φ находим r_k. Если $P_k = \phi$, то переходим к $(k+1)$-му шагу $\bar{\varphi}$. Если $P_k \neq \phi$, то проверяем, выполняется ли условие (1). Если да, то p^* — оптимальный элемент задачи $\mathfrak{A}$. Если нет, переходим к $(k+1)$-му шагу $\bar{\varphi}$.

Легко видеть, что в схему $\bar{\varphi}$ укладываются известные методы отсечения Гомори для решения задач целочисленного линейного программирования, если считать, что бесконечное расширение R получается отбрасыванием условий целочисленности, а $Q(X) = F(X)$ для всех $X \in R$. Очевидно, что в этом случае критерий (1) срабатывает автоматически, как только найден целочисленный план X_k ($X_k \in P$).

Процедуру решения задачи целочисленного линейного программирования методом Лэнда и Дойга также можно трактовать в терминах метода Φ. Действительно, расширяем множество планов P исходной задачи, отбрасывая условия целочисленности. Решив полученную задачу линейного программирования, находим план X_1. Если все его компоненты целочисленны ($X_1 \in P$), то X_1 — оптимальный план исходной задачи.

k-й шаг ($k = 2, 3, \ldots$). Пусть x_j^{k-1} — нецелочисленная компонента плана X_{k-1}. Тогда

$$R(X_{k-1}) = \{X \mid [x_j^{k-1}] < x_j < [x_j^{k-1}] + 1, \quad X \in R_{k-1}\},$$

и далее по схеме Φ в предположении, что $Q(X) = F(X)$ для $X \in R$.

Конечность метода Лэнда и Дойга при такой интерпретации действий аргументируется ограниченностью каждой переменной сверху и снизу.

Несомненный интерес представляет другой вариант схемы Φ, когда множество планов P не расширяется ($R = P$). Естественно, что в этом случае необходимо определить мажоранту на P. Достоинством этого варианта является то, что, строя лишь планы исходной задачи, всегда можно оценить уклонение лучшего из полученных планов от оптимального. Такой подход к решению задач целочисленного линейного программирования удается осуществить для следующей задачи $\mathfrak{B}$:

$$F(x) = \sum_{j \in N} c_j x_j \to \max; \tag{2}$$

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{3}$$

$$0 \leqslant x_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{4}$$

$$x_j \text{ — целое}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, а параметры $a_{ij} \geqslant 0$, $b_i > 0$, c_j — целые числа. Не исключая общности, можно считать, что $c_j > 0$ для любых $j \in N$ (в противном случае j-я компонента оптимального плана равна нулю).

Введем отношение порядка для векторов: $X' \leqslant X''$, если $x_j' \leqslant x_j''$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Если среди последних неравенств есть хотя бы одно строгое, то будем говорить, что X' меньше, чем X'' ($X' < X''$). Очевидно, если X_0 — план задачи $\mathfrak{B}$, то всякий меньший вектор — тоже план задачи $\mathfrak{B}$. Кроме того, так как все $c_j > 0$, то

$$F(X_0) \geqslant F(X) \quad \text{для} \quad X \leqslant X_0. \tag{6}$$

Поэтому при построении последовательности планов задачи $\mathfrak{B}$ в порядке ухудшения мажоранты можно не конструировать планы, которые меньше уже полученных, так как среди них нет оптимального плана.

Совокупность индексов $v \subset N$ будем называть допустимой и писать $v \in \mathscr{D}$, если $\sum\limits_{j \in v} a_{ij} \leqslant b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно, что $v = \phi$ — допустимая совокупность. Пусть пара (u_0, v_0) такова, что $u_0, v_0 \subset N$, $u_0 \cap v_0 = \phi$, $v_0 \in \mathscr{D}$, $N \setminus \{u_0 \cup v_0\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, где $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$. Пусть $J_k = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, q$, и $J_0 = \phi$. Определим план $X(u_0, v_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ задачи $\mathfrak{B}$, компоненты которого вычисляются по формулам

$$x_j^0 = \begin{cases} 0 \text{ для } j \in u_0, \\ 1 \text{ для } j \in v_0; \end{cases}$$

$$x_{j_k}^0 = \begin{cases} 1, \text{ если } v_0 \cup \{j \mid j \in J_{k-1}, x_j^0 = 1\} \cup \{j_k\} \in \mathscr{D}, \\ 0 \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \ldots, q$. Далее введем обозначение $\bar{u}_0 = \{j \mid j \in N \setminus u_0, x_j^0 = 0\}$.

Для пары (u_0, v_0) определим множество пар $W(u_0, v_0) = \{(u_1, v_1),$

$(u_2, v_2), \ldots, (u_{|\bar{u}_0|}, v_{|\bar{u}_0|})\}$ * по правилам:

$$u_1 = u_0;$$
$$u_p = u_{p-1} \cup \{j'_{p-1}\}, \quad p = 2, 3, \ldots, |\bar{u}_0|;$$
$$v_p = v_0 \cup \{j'_p\}, \quad p = 1, 2, \ldots, |\bar{u}_0|,$$

где $\{j'_1, j'_2, \ldots, j'_{|\bar{u}_0|}\} = \bar{u}_0$, причем $j'_1 < j'_2 < \ldots < j'_{|\bar{u}_0|}$. Естественно считать, что $W(u_0, v_0) = \phi$, если $\bar{u}_0 = \phi$.

Введем множество $W^*(u_0, v_0) = \{(u, v) \mid (u, v) \in W(u_0, v_0),\ v \in \mathcal{D}\}$. Через $P(u_0, v_0)$ обозначим множество планов задачи (2) — (5) с дополнительным условием

$$x_j = \begin{cases} 0 \text{ для } j \in u_0, \\ 1 \text{ для } j \in v_0. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\bigcup_{(u,v)\in W^*(u_0,v_0)} P(u, v) = P(u_0, v_0) \setminus \{X \mid X \leqslant X(u_0, v_0),\quad X \in P(u_0, v_0)\}. \tag{8}$$

Пусть $F(u_0, v_0) = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m} F_i(u_0, v_0)$, где $F_i(u_0, v_0)$ — максимальное значение функционала $F(X)$ при условиях (4), (7) и $\sum\limits_{j\in N} a_{ij}x_j \leqslant b_i$ **.

Сформулируем алгоритм Φ_0 построения последовательности планов задачи $\mathfrak{B}$.

Пусть $W_1 = (u^{(1)}, v^{(1)})$, где $u^{(1)} = v^{(1)} = \phi$.

k-й шаг ($k = 1, 2, \ldots$) алгоритма Φ_0. Находим

$$\max_{(u,\,v)\in W_k} F(u, v) = F(u^{(k)}, v^{(k)})$$

и план $X_k = X(u^{(k)}, v^{(k)})$. Строим множество пар

$$W_{k+1} = \{W_k \setminus (u^{(k)}, v^{(k)})\} \cup W^*(u^{(k)}, v^{(k)})$$

и переходим к $(k+1)$-му шагу. Работа алгоритма Φ_0 заканчивается,

$$W_{k+1} = \phi.$$

Из (8) и алгоритма Φ_0 получаем

$$\bigcup_{(u,\,v)\in W_{k+1}} P(u, v) = P \setminus \bigcup_{i=1}^{k} P(X_i), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

где $P = P(u^{(1)}, v^{(1)})$ — множество планов задачи $\mathfrak{B}$, $P(X_i) = \{X \mid X \leqslant X_i, X \in P(u^{(i)}, v^{(i)})\}$. При этом, в силу (6), имеем

$$F(X_k) = \max_{X\in P(X_k)} F(X), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Так как $F(u^{(k)}, v^{(k)}) \geqslant F(X_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, то функция $Q(X_k) = F(u^{(k)}, v^{(k)})$ является мажорантой функции $F(X)$ ***, причем для любой пары $(u, v) \in W_k$ справедливо равенство

$$F(u, v) = Q(X(u, v)) = \max_{X\in P(u,\,v)} Q(X).$$

Теперь, учитывая (9) и (10), можно утверждать, что алгоритм Φ_0 работает так же, как и Φ, если считать $R = P$. Поэтому для последовательности $X_1, X_2, \ldots$ справедлив критерий оптимальности. Итак, k-й шаг ($k = 1, 2, \ldots$) **алгоритма Φ_0 решения задачи $\mathfrak{B}$** состоит в том, что с помощью алгоритма Φ_0 находим план X_k и проверяем, выполняется ли неравенство

$$Q(X_k) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k} F(X_i) = F(X_k^*). \tag{11}$$

Если да, то X_k^* — оптимальный план задачи $\mathfrak{B}$. Если нет, то переходим к следующему шагу Φ_0.

* $|u|$ — число элементов множества u.

** Это значение можно легко найти (см., например, [4]).

*** Заметим, что в качестве мажоранты $F(u_0, v_0)$ можно брать максимальное значение функционала $F(X)$ при ограничениях (4), (7) и s-ограничении Балаша [5].

Замечание 1. Если на k-м шаге работы алгоритма $\mathfrak{F}_0$ условие (11) не выполняется, то для оптимального значения F^* функционала задачи $\mathfrak{B}$ имеют место двухсторонние оценки

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant k} F(X_i) \leqslant F^* \leqslant Q(X_k).$$

Замечание 2. Если на k-м шаге работы $\mathfrak{F}_0$ окажется, что $W_{k+1} = \phi$, т. е. работа алгоритма $\mathfrak{F}_0$ закончена, то X_k^* является оптимальным планом задачи $\mathfrak{B}$.

Предложенный здесь метод решения задачи $\mathfrak{B}$ реализован на ЭВМ «Минск-22». Было решено 10 задач размером $m \times n = 5 \times 32$. Время получения оптимального решения колебалось от 10 сек. до 3 мин., а количество итераций — от 30 до 120. Для задач 10×48 время решения было в пределах от 1 до 7 мин. Максимальный размер решавшихся задач 28×91. Решение пяти таких задач потребовало 15 сек. (12 итераций), 2 мин. (91 итерация), 8 мин. (104 итерации), 11 мин. (202 итерации) и 17 мин. (395 итераций). Во всех перечисленных задачах больше половины времени ЭВМ работает, чтобы убедиться в оптимальности уже полученного плана.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
18 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Емеличев, ДАН, 192, № 5 (1970). [2] В. А. Емеличев, В. И. Комлик, ДАН, 188, № 2 (1969). [3] V. A. Emiličev, V. I. Komlik, Soviet Math. Dokl., 10, № 5 (1969). [4] В. И. Комлик, В. А. Емеличев, Докл. АН БССР, 11, № 12 (1967). [5] E. Balas, Oper. Res., 15, № 5 (1967).