**Доклады Академии наук СССР**
**1971. Том 198, № 2**

УДК 513.83

*МАТЕМАТИКА*

**В. ЗАЙЦЕВ**

# ТЕОРЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ АБСТРАКТНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ СПЕКТРОВ

*(Представлено академиком П. С. Александровым 3 XI 1970)*

Предметом этой работы являются результаты, позволяющие выделить среди абстрактных проекционных спектров * те, которые эквивалентны ** спектрам над семействами разложений топологических пространств.

Сформулируем сначала теорему реализации для конечных спектров.

Теорема $\mathrm{I}_{\varkappa}$. *Всякий конечный абстрактный проекционный спектр* $s = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$ *(сильно) эквивалентен спектру над некоторым семейством конечных разбиений бикомпактного полурегулярного**** *пространства (а именно, над семейством* $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ *конечных разбиений предельного* **** *пространства* $\hat{s}$*).*

Для классических спектров соответственно имеет место

Теорема $\mathrm{I}_{\zeta}$. *Среди абстрактных классических проекционных спектров полные спектры и только они (сильно) эквивалентны классическим спектрам над направленными семействами разбиений топологических пространств.*

---

* Основные определения, касающиеся проекционных спектров, предполагаются известными; см., например, ([1-3]). Проекционные спектры мы понимаем в общем смысле: общий спектр может быть или «классическим» (как в ([5])) или «большим» (введенным мною в ([3])). Большие спектры содержат комплексы $K_\alpha$, среди симплексов которых имеются бесконечномерные (т. е. симплексы с бесконечным числом вершин). В соответствии с этим в той же работе ([3]) введено понятие большого нерва $L_\alpha$ системы множеств $\alpha$ — как (обобщенного) комплекса, вершины которого (как всегда) соответствуют элементам системы $\alpha$, а симплексы — ее центрированным подсистемам. Понятие большого нерва автоматически приводит к понятию большого спектра над данным направленным семейством разложений. При этом разложением пространства $X$ называется покрытие этого пространства каноническими замкнутыми множествами с дизъюнктными ядрами. Локально-конечные, в частности, конечные разложения называются разбиениями ([5]).

** Два спектра называются эквивалентными ([4]), если от одного из них можно перейти к другому посредством конечного числа следующих операций: переход от данного спектра к изоморфному ему; переход от данного спектра к его конфинальной части; переход от данного спектра к спектру, содержащему данный в качестве конфинальной части. Два спектра называются сильно эквивалентными, если они эквивалентны, и, кроме того, состоят из одних и тех же (или изоморфных) комплексов. Например, два спектра, из которых один получается из другого усилением или ослаблением порядка или мультипликацией (см. ([5, 4])), сильно эквивалентны между собою.

*** Пространство называется полурегулярным ([6]), если канонические открытые множества в нем образуют базу.

**** Как известно ([3]), полный предел $\hat{S}$ спектра $S = \{K_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^{\alpha'}\}$ есть $T_0$-пространство, точками которого являются все нити спектра, а открытую базу составляют множества вида $Ot_\alpha$, где для любого (в том числе и бесконечномерного) симплекса $t_{\alpha_0}$ множество $Ot_{\alpha_0}$ определено как множество всех нитей $\xi' = \{t_\alpha'\}$, для которых $t_{\alpha_0}' \leqslant t_{\alpha_0}$. Через $\Phi t_{\alpha_0}$ обозначается множество всех нитей $\xi' = \{t_\alpha'\}$, для которых $t_{\alpha_0}' \geqslant t_{\alpha_0}$. Через $\varphi_\alpha$ обозначена совокупность всех $\Phi e_\alpha$, где $e_\alpha$ пробегает множество всех вершин комплекса $K_\alpha$. Спектр называется полным, если для всех его конечномерных симплексов $t_\alpha$ множества $\Phi t_\alpha \neq \Lambda$. Нам потребуются еще следующие определения.

Спектр называется канонический, если для любой вершины $e_\alpha$ имеем $Oe_\alpha \neq \Lambda$. Далее, комплекс $K$ называется конечно определенным, если он удовлетворяет условию: всякое множество $T$ вершин комплекса $K$, все конечные непустые подмножества $t \subseteq T$ которого определяют симплексы комплекса $K$, само определяет симплекс этого комплекса. Спектр называется конечно определенным, если конечно определенными являются все его комплексы.

Очевидно, всякий классический спектр является конечно определенным.

Наконец, имеет место общая

Теорема I. *Среди общих абстрактных проекционных спектров полные канонические конечно определенные спектры и только они сильно эквивалентны большим спектрам над направленными семействами разложений топологических пространств.*

Дадим более развернутую форму теоремы $\mathrm{I}_\zeta$.

Теорема $\mathrm{II}_\zeta$. *Всякий классический абстрактный спектр* $s = \{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ *(сильно) эквивалентен спектру над направленным семейством* $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ *разбиений полурегулярного* $T_0$*-пространства* $\hat{s}$.

*Обратно, классический спектр* $S_\mathfrak{z} = \{N_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ *любого топологического пространства* $X$ *над всяким направленным семейством* $\mathfrak{z} = \{\alpha\}$ *разбиений и всякий спектр, эквивалентный ему, являются полными.*

Теорема $\mathrm{I}_\varkappa$ является частным случаем теоремы $\mathrm{I}_\zeta$, так как всякий конечный спектр является полным.

Можно дать и следующую развернутую формулировку общей теоремы I.

Теорема II. *Всякий полный конечно определенный канонический (общий) абстрактный спектр* $S = \{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ *сильно эквивалентен большому спектру над направленным семейством* $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ *консервативных разложений полурегулярного* $T_0$*-пространства* $\hat{S}$.

*Обратно, большой спектр* $S_\mathfrak{z} = \{L_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ *любого топологического пространства* $X$ *над всяким направленным семейством* $\mathfrak{z} = \{\alpha\}$ *его консервативных разложений как и всякий спектр, ему сильно эквивалентный, является полным конечно определенным и каноническим.*

Заметим, что теорема $\mathrm{II}_\zeta$ является частным случаем теоремы II, так как всякий полный классический спектр является каноническим.

Наметим теперь кратко доказательство основных утверждений теоремы II. Прежде всего, доказывается представляющее и самостоятельный интерес весьма простое

Предложение 1. *Полный предел* $\hat{S}$ *всякого канонического спектра* $S = \{K_\alpha, \mathfrak{S}_\alpha^{\alpha'}\}$ *есть полурегулярное* $T_0$*-пространство.*

В основе всех рассуждений лежит рассмотрение множеств $Ot_\alpha$ и $\Phi t_\alpha$. Прежде всего доказывается, что если $e_{\alpha_0}$ есть вершина $K_{\alpha_0} \in S$, то множество $\Phi e_{\alpha_0}$ есть каноническое замкнутое множество, и совокупность множеств $\Phi e_{\alpha_0}$, когда $e_{\alpha_0}$ пробегает все вершины комплекса $K_{\alpha_0}$, есть консервативное разложение $\varphi_{\alpha_0}$ пространства $\hat{S}$. Отсюда следует формула $Ot_{\alpha_0} = \hat{S} \setminus \sigma_{\alpha_0}$, где $\sigma_\alpha$ есть множество тех $\Phi e_{\alpha_0}$, для которых $e_{\alpha_0}$ не есть вершина симплекса $t_{\alpha_0}$. Из этой формулы и консервативности разложения $\varphi_{\alpha_0}$ вытекает, что $Ot_{\alpha_0}$ есть каноническое открытое множество, а отсюда в свою очередь сразу следует полурегулярность пространства $\hat{S}$.

Спектр $S^*$ пространства $\hat{S}$ над семейством консервативных разложений $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$ называется спектром, сопряженным спектру $S$.

Доказательство теоремы II заключается в установлении того факта, что при сделанных предположениях относительно спектра $S$ спектры $S$ и $S^*$ оказываются сильно эквивалентными между собою.

Поскольку теоремы II и $\mathrm{II}_\zeta$ состоят из двух взаимно-обратных предположений, то условия, сформулированные в них, не содержат излишних частей и в этом смысле окончательны.

Эта работа написана мною во время пребывания в клинике проф. Е. М. Тареева; я пользуюсь случаем выразить ему мою искреннюю и глубокую благодарность.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Зайцев, ДАН, 171, № 3, 521 (1966). [2] В. Зайцев, ДАН, 182, № 1, 27 (1968). [3] В. Зайцев, ДАН, 185, № 1, 20 (1969). [4] П. Александров, Матем. сборн., 21, 161 (1947). [5] В. Пономарев, Матем. сборн., 60, 89 (1963). [6] M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc., 41, 375 (1937).