Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 517.946 **МАТЕМАТИКА**

В. Я. ИВРИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, НЕ ИМЕЮЩИЕ РЕШЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 16 XI 1970)

В работе ([1]) Г. Леви привел пример дифференциального оператора L первого порядка с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами такого, что уравнение

$$Lu = f \tag{1}$$

неразрешимо в пространстве распределений $\mathscr{D}'$ при некоторой правой части $f \in C_0^\infty$.

Л. Хёрмандер описал обширный класс уравнений, не имеющих решений ([2]); условие Хёрмандера заключалось в существовании $(\hat{x}, \hat{\xi})$ таких, что

$$L_m(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0; \tag{2}$$

$$C_{2m-1}(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0, \tag{3}$$

где L_m — главная часть L, а $C = L^{(*)}L - LL^{(*)}$, $L^{(*)}$ — формально сопряженный к L оператор. В дальнейшем эти результаты были обобщены им же на случай псевдодифференциальных операторов ([4]), последующее обобщение принадлежит Ю. В. Егорову ([5]).

В этих работах требуется, хотя бы и неявно, простота некоторого решения уравнения (2); при этом определяющей является главная часть, а младшие члены ни в условие Хёрмандера, ни в условия Егорова не входят.

В настоящей работе изучаются дифференциальные уравнения с кратными характеристиками; в теоремах 1, 2 предполагается, что

$$L_m(x, \xi) = A^2(x, \xi) Q(x, \xi); \tag{4}$$

в теореме 3 изучаются уравнения более общего вида.

В работе будем придерживаться обозначений:

$x = (x_1, \ldots, x_l) \in \Omega \subset \mathbf{R}^l$, Ω — открытая область; $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l) \in \mathbf{R}^l$;

$$L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad L_s(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad 0 \leqslant s \leqslant m,$$

$$a_\alpha(x) \in C^\infty(\overline{\Omega});$$

$$L^{(\alpha)}(x, \xi) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha L(x, \xi), \quad L_{(\beta)}(x, \xi) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta L(x, \xi),$$

$$L \equiv L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha, \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Сформулируем необходимую нам лемму 6.1.2 из ([3]).

Лемма. *Если уравнение* (1) *для любой* $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет решение* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, *то для любого* G — *компактного подмножества существуют* C, k *такие, что для любых* $u, v \in C_0^\infty(G)$ *выполнено неравенство*

$$\left| \int_\Omega u\bar{v}\,dx \right| \leqslant C \| v \|_{C^k(\Omega)} \cdot \| L^{(*)} u \|_{C^k(\Omega)}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть* L_m *представима в виде* (4), *где* A, Q *имеют бесконечно дифференцируемые коэффициенты и пусть существуют*

$(\hat{x}, \hat{\xi}) \in \Omega \times (\mathbf{R}^l - \{0\})$ *такие, что для* $A(x, \xi)$ *выполнены условия* (2), (3) *и*

$$Q(\hat{x}, \hat{\xi}) \neq 0 \tag{6}$$

и либо

$$L'_{m-1}(x, \hat{\xi}) \neq 0, \quad L' = L - A \cdot A \cdot Q, \tag{7}$$

либо

$$L'_{m-1}(x, \zeta) = \nu(x, \zeta) A(x, \zeta) \tag{7'}$$

для всех $(x, \xi) \in \Omega \times C^l$, *близких к* $(\hat{x}, \hat{\xi})$; $\nu(x, \zeta) \in C^\infty$.

Тогда существует $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *такая, что* (1) *не имеет решения* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* L_m *представима в виде* (4), *где* A *имеет вещественные коэффициенты и существуют* $(\hat{x}, \hat{\xi})$ *такие, что*

$$A(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0, \quad Q(\hat{x}, \hat{\xi}) \neq 0, \quad (A^{(j)}(\hat{x}, \hat{\xi}))_{j=1,\ldots,l} \neq 0.$$

$R(\hat{x}, \hat{\xi}) \equiv L'_{m-1}(\hat{x}, \hat{\xi}) Q^{-1}(\hat{x}, \hat{\xi})$ *вещественно и отлично от* 0, *а* $C'_{3k-2}(\hat{x}, \hat{\zeta}) \neq 0$, *где* $k = \operatorname{ord} A$,

$$C' \equiv A\tilde{R} - \tilde{R}A, \quad \tilde{R} \equiv R(x, D) - R_{(*)}(x, D).$$

Тогда существует $f \in C_0^\infty(\Omega)$ *такая, что* (1) *не имеет решения* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Доказательство аналогично соответствующим рассмотрениям из [2-4], с той лишь разницей, что в доказательстве теоремы 1, если выполнено (7), и в доказательстве теоремы 2 $u = v$ надо брать в виде

$$u = v = \exp(i\varphi\omega^2 + i\psi\omega) \sum_{n=0}^{N} w_n \omega^{-n}, \tag{8}$$

а в случае (7') в доказательстве теоремы 1 $u = v$ надо брать в обычном виде

$$u = v = \exp(i\varphi\omega) \sum_{n=0}^{N} \omega_n \omega^{-n},$$

но здесь w_n будут удовлетворять дифференциальным соотношениям 2-го порядка; при этом в доказательстве теоремы 1 $\operatorname{Im}\varphi \geqslant \varepsilon|x - \hat{x}|^2$, $\varphi(\hat{x}) = 0$, а в доказательстве теоремы 2 φ вещественна, а $\operatorname{Im}\psi \geqslant \varepsilon|x - \hat{x}|^2$, $\psi(\hat{x}) = 0$.

Для исследования вырождающихся уравнений требуются модификации стандартных методов в духе работы [6].

Пусть имеется $x \in \Omega$, разбиение пространства

$$x = x' + x'' = (x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0, x_{d+1}, \ldots, x_l),$$

соответствующие разбиения для ξ и для мультииндексов, r целое, $r \geqslant 2$, $p \geqslant q > 0$ такие, что для всех ξ''

$$L_{m(\beta)}^{(\alpha)}(\hat{x}, \xi'') = 0, \tag{9}$$

как только

$$|\alpha| + \frac{|\beta'|}{p} + \frac{|\beta''|}{q} < r.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\hat{x} = 0$. Введем новые координаты

$$x'_{\text{нов}} = x'_{\text{стар}}\omega^\sigma, \quad x''_{\text{нов}} = x''_{\text{стар}}\omega^\tau,$$
$$\tau \geqslant \sigma \geqslant 0 - \text{целые}.$$

Тогда, если было выполнено (5), то для любого компакта $W \subset \mathbf{R}^l$ (если $\sigma = 0$, на W налагается условие $W \subset \{|x''| < \varepsilon\}$, если же $\tau = 0$, то

$W \subset \{|x| < \varepsilon\}$) существует $\omega(W)$ такое, что

$$\left|\int\limits_W u\bar{v}\,dx\right| \leqslant C\|v\|_{C^k(W)} \cdot \|L_\omega^{(*)}u\|_{C^k(W)} \cdot \omega^{K(l,\tau)} \tag{10}$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\omega \geqslant \omega(W)$, где $L_\omega^{(*)}$ получен из L после замены переменных.

Если

$$1^0. \qquad u = \exp i\left(\xi'' x'' \omega^n + \sum_{j=0}^{\nu-1} \varphi_j(x)\,\omega^{\nu-j}\right) \times w, \tag{11}$$

где $n > \nu \geqslant 1$ — целые; либо

$$2^0. \qquad u = \exp i\left(\sum_{j=0}^{\nu-1} \varphi_j(x)\,\omega^{\nu-j}\right) \times w, \tag{12}$$

то

$$L_\omega u = \exp i\left(\xi'' x'' \omega^n + \sum_{j=0}^{\nu-1} \varphi_j(x)\,\omega^{\nu-j}\right)\omega^s\{(A(x, \xi'', \varphi_{0x'}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\nu-1} \omega^{\nu-j}(H(x, \xi'', \varphi_{0x'}D')\varphi_j + B_j(x, \xi'')[\varphi_0, \ldots, \varphi_{j-1}])\,w +$$

$$+\,\omega^{-\nu}(H(x, \xi'', \varphi_{0x'}D') + (x, \xi'')[\varphi_0, \ldots, \varphi_{\nu-1}])\,w + \ldots\},$$

где B_j, C — нелинейные дифференциальные операторы, действующие на $\varphi_0, \ldots, \varphi_{j-1}$ и $\varphi_0, \ldots, \varphi_{\nu-1}$ соответственно,

$$H = \sum_{k=1}^{d} A^{(k)}(x, \xi'', \varphi_{0x'})\,D_k \tag{13}$$

в случае 1° или аналогичная формула в случае 2°.

Используя стандартные методы, можно получить, что верно следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть существуют τ, σ, n, ν, ξ'' такие, что для любого наперед заданного числа N в окрестности некоторого $x^* \in \mathbb{R}^l$ ($|x^{*\prime\prime}| < \varepsilon$, если $\sigma = 0$; $|x^*| < \varepsilon$, если $\tau = 0$) можно найти функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_{\nu-1}$, удовлетворяющие условиям*

$$1^\circ. \quad \varphi_k(x^*) = 0, \quad 0 \leqslant k \leqslant \nu - 1, \quad \operatorname{Im}\varphi_k(x) \geqslant 0, \quad k < \lambda,$$

$$\operatorname{Im}\varphi_\lambda(x) \geqslant \delta|x'' - x^{*\prime\prime}|_2, \ \operatorname{Im}\varphi_k(x) \geqslant -C|x'' - x^{*\prime\prime}|^2, \ \lambda < k < \mu, \ (\lambda \leqslant \mu)$$

$$\operatorname{Im}\varphi_\mu(x) \geqslant \delta|x' - x^{*\prime}|^2 - C|x'' - x^{*\prime\prime}|^2, \quad \delta > 0 \text{ и } \nu - \mu = 1;$$

либо $\nu - \mu = 2$ и $A(x, \xi'', \varphi_{0x'}) = O(|x - x^*|^N)$, $H\varphi_j + B_j(x, \xi'')[\varphi_0, \ldots, \varphi_{j-1}] = O(|x - x^*|^N)$, $1 \leqslant j \leqslant \nu - 1$, и $A^{(j)}(x^*, \xi'', \varphi_{0x'}(x^*))|_{j=1,\ldots,d} \neq 0$; либо аналогичным условиям в случае 2°.

Тогда при некоторой $f \in C_0^\infty(\Omega)$ уравнение (1) не имеет решения $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Примеры. 1) $L \equiv \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\partial}{\partial x_{l-1}}\right)^2 + i\alpha(x)\dfrac{\partial}{\partial x_l}$, если $\alpha(\hat{x}) \neq 0$ и вещественна, а $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\alpha(\hat{x})$ невещественна при каком-либо $1 \leqslant j \leqslant l - 1$, то (1) не разрешимо при некоторой $f \in C_0^\infty(\Omega)$;

$$2)\ L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - x_1^5 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + (i\alpha + i\beta x_1)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

или

$$L \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \pm x_1^6 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + (i\alpha + i\beta x_1)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

где α вещественна, отлична от 0, β невещественна. $Lu = f$ не имеет решения $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ при какой-либо $f \in C_0^\infty(\Omega)$, если $\Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \phi$.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
9 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Lewy, Ann. Math., (2), 66, № 1, 155 (1957). [2] L. Hörmander, Math. Ann., 140, № 3, 169 (1960). [3] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [4] Л. Хёрмандер, В сборн. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 166. [5] Ю. В. Егоров, ДАН, 187, № 6, 1232 (1969). [6] В. Я. Иврий, ДАН, 197, № 3 (1971).