

В. И. ДМИТРИЕВ

О МЕТОДЕ ЛЬОНСА — ПЕТРЕ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 XII 1970)

В 1961 г. Ж. Л. Лионс и Ж. Петре ⁽¹⁾ предложили «метод средних» построения промежуточных интерполяционных пространств. В дальнейшем этот метод исследовался в ряде работ ^(2, 3, 4).

В настоящей работе предлагается некоторое развитие метода средних, позволяющее строить более широкие классы интерполяционных пространств.

Одним из наиболее глубоких результатов теории метода средних является так называемая «теорема о реитерации»; здесь приводится ее обобщение, которое обнаруживает неожиданную связь между методом средних и интерполяционным методом А. П. Кальдерона ⁽²⁻⁴⁾.

Если A — банахово пространство, а E — идеальная структура (на множестве R с σ -конечной мерой μ , коротко — на (R, μ)) ⁽⁵⁾, то через $E(A)$ обозначается совокупность всех (классов) функций $u = u(t)$, $t \in R$, $u(t) \in A$, сильно измеримых в A и таких, что $\|u(t)\|_A \in E$; $E(A)$ является банаховым пространством по норме $\|u\|_{E(A)} = \|\|u(t)\|_A\|_E$. Для положительной измеримой на (R, μ) функции $w = w(t)$ через E^w обозначается идеальная структура с нормой $\|x\|_{E^w} = \|w \cdot x\|_E$.

1. K -метод построения интерполяционных пространств. Пусть A_0, A_1 — пара ^(1, 2) банаховых пространств, E_0, E_1 — две идеальные структуры на (R, μ) . Обозначим через $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$ совокупность в $E_0(A_0) + E_1(A_1)$ (см. ^(1, 2)), состоящую из всех постоянных почти всюду (п.в.) функций. $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$ — замкнутое подпространство суммы $E_0(A_0) + E_1(A_1)$ и его можно идентифицировать с банаховым пространством всех тех элементов $x \in A_0 + A_1$, для которых существуют также функции $u_i = u_i(t) \in E_i(A_i)$, $i = 0, 1$, что $x = u_0(t) + u_1(t)$ п.в., с нормой

$$\|x\|_{(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K} = \|x\|_{E_0, E_1}^K = \inf_{x = u_0(t) + u_1(t)} (\|u_0\|_{E_0(A_0)} + \|u_1\|_{E_1(A_1)}).$$

Пространство $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$ может содержать ненулевые элементы лишь в случае, когда

$$E_0 + E_1 \ni e, \quad (1)$$

где $e = e(t) \equiv 1$. Если (1) выполнено, то верны следующие утверждения.

Лемма 1. Пространства $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K$ являются промежуточными ^(1, 2) между A_0 и A_1 , при этом

$$\begin{aligned} \|x\|_{E_0, E_1}^K &\leq \|e\|_{E_0 + E_1} \|x\|_{A_0 \cap A_1} \quad (x \in A_0 \cap A_1), \\ \|x\|_{A_0 + A_1} &\leq \frac{1}{\|e\|_{E_0 + E_1}} \|x\|_{E_0, E_1}^K \quad (x \in (A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K). \end{aligned}$$

Теорема 1 (интерполяционная ^(1, 2, 5)). Пусть A_0, A_1 и B_0, B_1 — две пары банаховых пространств.

Тогда

$$\|T\|_{(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K \rightarrow (B_0, B_1)_{E_0, E_1}^K} \leq \max(\|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}, \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1})$$

для любого линейного оператора $T: A_0 + A_1 \rightarrow B_0 + B_1$.

Замечание 1. Пусть $E_0 \cap E_1 \ni e$. Тогда $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K = A_0 + A_1$ с эквивалентными нормами. Если же $E_i \ni e$ для некоторого i , то $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^K \supset A_i$ (непрерывное вложение).

Пример. Рассмотрим на $(0, \infty)$ непрерывную функцию $\varphi(t) > 0$. Рассмотрим также на $((0, \infty), dt)$ две идеальные структуры $L_\infty^{1/\varphi}$ и E , где E содержит положительную непрерывную функцию и такова, что $L_\infty^{1/\varphi} + E \ni e$. Пусть

$$A_0 = L_\infty[0, 1] = L_\infty, \quad A_1 = L_1[0, 1] = L_1$$

(с мерой Лебега). Тогда получаем интерполяционные между L_∞ и L_1 пространства $L_{\varphi, E} = (L_\infty, L_1)_{L_\infty^{1/\varphi}, E}^K$ с нормами

$$\|x\|_{\varphi, E} = \inf_{\sigma > 0} \left\{ \sigma + \left\| \int_{\sigma \varphi(t)}^\infty D(x, \tau) d\tau \right\|_E \right\},$$

где $D(x, \tau) = \text{mes} \{s: |x(s)| > \tau\}$ — функция распределения функции $x(s)$. Отметим, что если, например, $\varphi(t) = t$, $E = L_1^{ap}(0, \infty)$, где $a_p(t) = p(1 - 1/p)^{pt^{p-2}}$ ($1 < p < \infty$), то $L_{\varphi, E} = L_p[0, 1]$ с равными нормами.

2. I -метод построения интерполяционных пространств. Пусть, как и выше A_0, A_1 — пара банаховых пространств, E_0, E_1 — две идеальные структуры на (R, μ) ; E_0', E_1' — пространства, ассоциированные (*) с E_0, E_1 соответственно. Предположим, что

$$E_0' + E_1' \ni e. \quad (1')$$

Лемма 2. Для любой функции $u = u(t) \in E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ существует интеграл $\int_R u(t) d\mu(t)$ в $A_0 + A_1$. Отображение $I: u \rightarrow \int_R u(t) d\mu(t)$ является линейным непрерывным оператором из $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$ в $A_0 + A_1$. Следовательно, ядро $N(I)$ оператора I есть замкнутое подпространство пространства $E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$.

Обозначим через $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^I$ фактор-пространство $E_0(A_0) \cap E_1(A_1) / N(I)$, которое можно идентифицировать с банаховым пространством тех элементов $x \in A_0 + A_1$, которые допускают представление вида $x = \int_R u(t) d\mu(t)$, где $u = u(t) \in E_0(A_0) \cap E_1(A_1)$, с нормой

$$\|x\|_{(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^I} \equiv \|x\|_{E_0, E_1}^I = \inf_{x = \int_R u(t) d\mu(t)} \|u\|_{E_0(A_0) \cap E_1(A_1)}.$$

Пространство $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^I$ может содержать ненулевые элементы лишь в случае, когда

$$E_0 \cap E_1 \neq \{0\}. \quad (2)$$

Если (2) выполнено, то верны следующие утверждения.

Лемма 3. Пространства $(A_0, A_1)_{E_0, E_1}^I$ являются промежуточными между A_0 и A_1 .

Теорема 2 (интерполяционная). То же, что в теореме 1, с заменой индекса K на I .

3. K - и I -методы для симметричных пространств со степенными весами. В последующем мы рассматриваем лишь случай $R = (0, \infty)$ и $d\mu(t) = dt/t$. Пусть E_0, E_1 — два симметричных (*)

пространства, дающих интерполяцию между $L_1[(0, \infty), dt/t] = L_1$ и $L_\infty[(0, \infty), dt/t] = L_\infty$ для линейных монотонных операторов T в $L_1 + L_\infty$:

$$\|T\|_{E_i \rightarrow E_i} \leq k \max(\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1}, \|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty}).$$

Пусть α_0, α_1 — два действительных параметра, $\alpha_0 \alpha_1 < 0$. Положим $E^\alpha = E^{(\alpha)}$. Для идеальных структур $E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}$ выполнены условия (1), (1'), (2).

Теорема 3. $(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}^K = (A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}^I$ с эквивалентными нормами.

В дальнейшем индексы K и I будем опускать.

Замечание 2. Интерполяционная теорема здесь уточняется:

$$\|T\|_{(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} \rightarrow (B_0, B_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}} \leq c \|T\|_{A_0 \rightarrow B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1 \rightarrow B_1}^\theta,$$

где $\theta = \alpha_0 / (\alpha_0 - \alpha_1)$ ($0 < \theta < 1$).

Замечание 3. Пространство $(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$ с точностью до эквивалентных норм совпадает с пространством, которое получается, если от функций $u_0(t)$ и $u_1(t)$ в определении K -метода дополнительно потребовать «ступенчатость», т. е. считать их постоянными на каждом промежутке из некоторой конечной или счетной совокупности промежутков, образующей разбиение интервала $(0, \infty)$.

4. О теореме типа реитерации в классах Лионса — Петре. В работе ⁽³⁾ (см. также, например, ⁽⁹⁾) были введены классы $\bar{K}_\theta(A_0, A_1)$, $\bar{K}_\theta(A_0, A_1) = \bar{K}_\theta(A_0, A_1) \cap \bar{K}_\theta(A_0, A_1)$ ($0 < \theta < 1$) некоторых промежуточных между A_0 и A_1 пространств.

Теорема 4. Пусть B_0 и B_1 — пространства классов $\bar{K}_{\theta_0}(A_0, A_1)$ и $\bar{K}_{\theta_1}(A_0, A_1)$ соответственно, $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$.

Тогда имеет место непрерывное вложение

$$(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} \subset (B_0, B_1)_{F_0^{\beta_0}, F_1^{\beta_1}},$$

где $\alpha_0 / (\alpha_0 - \alpha_1) = \theta$, $\beta_i = (1 - \theta_i)\alpha_0 + \theta_i\alpha_1$, $F_i = E_0^{1-\theta_i} E_1^{\theta_i}$ — пространства кальдероново-ишакской шкалы ^(2, 3), соединяющей E_0 и E_1 .

Теорема 5. Пусть B_0 и B_1 — пространства классов $\bar{K}_{\theta_0}(A_0, A_1)$ и $\bar{K}_{\theta_1}(A_0, A_1)$ соответственно, $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$.

Тогда имеет место непрерывное вложение

$$(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} \supset (B_0, B_1)_{F_0^{\beta_0}, F_1^{\beta_1}},$$

где $\alpha_0 / (\alpha_0 - \alpha_1) = \theta$, $\beta_i = (1 - \theta_i)\alpha_0 + \theta_i\alpha_1$, $F_i = E_0^{1-\theta_i} E_1^{\theta_i}$.

Доказательство. Пусть $x \in (B_0, B_1)_{F_0^{\beta_0}, F_1^{\beta_1}}$. Тогда $x = v_0(t) + v_1(t)$, где $v_i = v_i(t) \in F_i^{\beta_i}(B_i)$ и функции $v_i(t)$, согласно замечанию 3, можно считать «ступенчатыми». Поскольку $B_i \in \bar{K}_{\theta_i}(A_0, A_1)$, то имеем $v_i(t) = v_{i0}(t, s) + v_{i1}(t, s)$, где

$$\|v_{i0}(t, s)\|_{A_0} \leq c_i s^{\theta_i} \|v_i(t)\|_{B_i}, \quad \|v_{i1}(t, s)\|_{A_1} \leq c_i s^{\theta_i-1} \|v_i(t)\|_{B_i}.$$

Функции $v_{i0}(t, s)$, $v_{i1}(t, s)$ можно считать «ступенчатыми» по s для почти всех t , причем, очевидно, не зависящими от t на каждом промежутке постоянства функций $v_i(t)$.

Далее

$$\begin{aligned} t^{\alpha_0} \|v_{i0}(t, s)\|_{A_0} &\leq c_i t^{\alpha_0-\beta_i} s^{\theta_i} (t^{\beta_i} \|v_i(t)\|_{B_i}), \\ t^{\alpha_1} \|v_{i1}(t, s)\|_{A_1} &\leq c_i t^{\alpha_1-\beta_i} s^{\theta_i-1} (t^{\beta_i} \|v_i(t)\|_{B_i}). \end{aligned}$$

Существуют такие $x_{i0}(t) \in E_0$, $x_{i1}(t) \in E_1$, что $\|x_{ij}\|_{E_j} \leq 1$ и

$$t^{\beta_i} \|v_i(t)\|_{B_i} \leq 2 \|v_i\|_{F_i^{\beta_i}(B_i)} |x_{i0}(t)|^{1-\theta_i} |x_{i1}(t)|^{\theta_i}.$$

Тогда

$$t^{\alpha_0} \|v_{i0}(t, s)\|_{A_0} \leq 2c_i \|v_i\|_{F_i^{\beta_i}(B_i)} t^{\alpha_0 - \beta_i} s^{\theta_i} |x_{i0}(t)|^{1-\theta_i} |x_{i1}(t)|^{\theta_i},$$

$$t^{\alpha_1} \|v_{i1}(t, s)\|_{A_1} \leq 2c_i \|v_i\|_{F_i^{\beta_i}(B_i)} t^{\alpha_1 - \beta_i} s^{\theta_i - 1} |x_{i0}(t)|^{1-\theta_i} |x_{i1}(t)|^{\theta_i}.$$

Выберем теперь s таким образом:

$$s = s_i(t) = t^{\alpha_1 - \alpha_0} |x_{i0}(t)| / |x_{i1}(t)|.$$

Последние неравенства принимают тогда вид

$$t^{\alpha_0} \|v_{i0}(t, s_i(t))\|_{A_0} \leq 2c_i \|v_i\|_{F_i^{\beta_i}(B_i)} |x_{i0}(t)|,$$

$$t^{\alpha_1} \|v_{i1}(t, s_i(t))\|_{A_1} \leq 2c_i \|v_i\|_{F_i^{\beta_i}(B_i)} t^{\alpha_1 - \beta_i - (1-\theta_i)(\alpha_1 - \alpha_0)} \times \\ \times \left(\frac{|x_{i0}(t)|}{|x_{i1}(t)|} \right)^{1-\theta_i} |x_{i0}(t)|^{1-\theta_i} |x_{i1}(t)|^{\theta_i} = 2c_i \|v_i\|_{F_i^{\beta_i}(B_i)} |x_{i1}(t)|.$$

Положим $\bar{v}_0(t) = v_{00}(t, s_0(t)) + v_{10}(t, s_1(t))$, $\bar{v}_1(t) = v_{01}(t, s_0(t)) + v_{11}(t, s_1(t))$. Функции $\bar{v}_0(t)$ и $\bar{v}_1(t)$ сильно измеримы в A_0 и A_1 соответственно и, по построению, $x = \bar{v}_0(t) + \bar{v}_1(t)$. Кроме того,

$$\|\bar{v}_i\|_{E_i^{\alpha_i}(A_i)} \leq 4 \max(c_0, c_1) (\|v_0\|_{F_0^{\beta_0}(B_0)} + \|v_1\|_{F_1^{\beta_1}(B_1)});$$

таким образом $x \in (A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}}$ и $\|x\|_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} \leq 8 \max(c_0, c_1) \|x\|_{F_0^{\beta_0}, F_1^{\beta_1}}$.

Следствием теорем 4 и 5 является

Теорема 6. Пусть $B_i \in K_{\theta_i}(A_0, A_1)$ ($i = 0, 1$).

Тогда при $0 < \theta_0 < \theta < \theta_1 < 1$.

$$(A_0, A_1)_{E_0^{\alpha_0}, E_1^{\alpha_1}} = (B_0, B_1)_{F_0^{\beta_0}, F_1^{\beta_1}},$$

где $\alpha_0 / (\alpha_0 - \alpha_1) = \theta$, $\beta_i = (1 - \theta_i)\alpha_0 + \theta_i\alpha_1$, $F_i = E_0^{1-\theta_i} E_1^{\theta_i}$ — пространства кальдероновой шкалы, соединяющей E_0 и E_1 .

По поводу теорем 4, 5, 6 отметим следующее. Во-первых, $\beta_0\beta_1 < 0$; во-вторых, F_0 и F_1 — симметричные пространства; в-третьих, пространства F_0 и F_1 интерполируют непрерывность линейных монотонных операторов, действующих в $L_1 + L_\infty$, между L_1 и L_∞ .

В заключение автор выражает благодарность С. Г. Крейну, за постановку задачи и руководство работой.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
26 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. L. Butzer, H. Berens, Semi-groups of Operators and Approximation, Berlin, 1967. ² А. П. Кальдерон, Сборн. пер. Математика, 3, 3, 56 (1965). ³ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, Тр. Московск. матем. общ., 17, 293 (1967). ⁴ С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, УМН, 21, 2 (128), 89 (1966). ⁵ J. L. Lions, J. Peetre, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 19, 5 (1964). ⁶ J. Peetre, Ricerche Mat., 12, 248 (1963). ⁷ J. Peetre, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 34, 133 (1964). ⁸ Е. М. Семенов, Функци. анализ и его прилож., 2, 2, 68 (1968). ⁹ К. Нагакэ, J. Math. Soc. Japan, 21, 2, 189 (1968).