Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 3

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

А. А. АРСЕНЬЕВ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ И РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 XI 1970)

1. Пусть Ω — ограниченная замкнутая область в N-мерном эвклидовом пространстве $\mathbf{R}_N$, $N \geqslant 3$. Предположим, что граница области Ω удовлетворяет условиям Ляпунова. Решением задачи рассеяния (р.з.р.) для области Ω мы будем называть решение внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца:

$$-\Delta u = \lambda u, \quad x \in \mathbf{R}_N \setminus \Omega, \quad u \in L^\infty \cap C(\overline{\mathbf{R}_N \setminus \Omega}), \quad u|_\Gamma = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$
$$u(x, k) = \exp(ikx) + \varphi(x, k), \quad k = n\sqrt{\lambda}, \quad |n| = 1, \quad k \in \mathbf{R}_N, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$
$$\varphi(x, k) = O(|x|^{1/2(1-N)}), \quad \left(\frac{\partial}{\partial |x|} - i\sqrt{\lambda}\right)\varphi(x, k) = o(|x|^{1/2(1-N)}), \quad |x| \to \infty.$$

Пусть $\mathfrak{A}_\gamma$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_\gamma = \int f^*(x)\, g(x) \exp(-\gamma |x|)\, dx, \quad \|f\|_\gamma^2 = \langle f, f\rangle_\gamma,$$

число γ в дальнейшем предполагается выбранным достаточно большим.

Известно, что р.з.р., рассматриваемое при фиксированном n как функция λ со значениями в $\mathfrak{A}_\gamma$, аналитично по λ в области $0 < \arg\lambda < 2\pi$, $|\lambda| > 0$, имеет аналитическое продолжение $u_+(\,, \sqrt{\lambda})$ в полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda < 0$, $u_-(\,, \sqrt{\lambda})$ — в полуплоскость $\operatorname{Im}\lambda > 0$, причем функции $u_\pm(\,, \sqrt{\lambda})$ конечномероморфны и не имеют полюсов в некоторой окрестности действительной оси ([1]). Для физических приложений важен вопрос о том, имеют ли вообще для произвольной области Ω функции $u_\pm(\,, \sqrt{\lambda})$ полюсы и где они расположены. В этом направлении нам известно два результата. Из работы ([2]) следует, что на мнимой оси функции $u_\mp(\,, \sqrt{\lambda})$ обязательно имеют полюсы, если только область Ω обладает, грубо говоря, тем свойством, что ни один луч не отражается от нее бесконечно долго, и в ([3]) доказано существование полюсов для «ловушечных» областей.

В этой работе мы даем асимптотическую оценку в зависимости от геометрии области Ω, величину той части плоскости λ, где полюсы обязательно существуют.

2. Сформулируем наши ограничения на область Ω. Рассмотрим тело, состоящее из m бесконечных круговых конусов с общей вершиной в точке 0; пусть $\tilde{B}$ — та часть шарового слоя $\{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$, которая лежит вне этих конусов; пусть область B получена из $\tilde{B}$ сглаживанием границы. Пусть Ω_1 — диффеоморфный образ слоя $\{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$, область Ω — образ области B при этом диффеоморфизме, Ω_3 — связная компонента множества $\mathbf{R}_N \setminus \Omega_1$, содержащая бесконечно удаленную точку, $\Omega_2 = \mathbf{R}_N \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_3)$. Мы предполагаем, что границы областей Ω_1 и Ω удовлетворяют условиям Ляпунова. Положим

$$d(\Omega) = \operatorname{mes}(\Omega_1 \setminus \Omega) + \operatorname{mes}(\operatorname{гр}\Omega_1 \setminus \operatorname{гр}\Omega).$$

Пусть $\{\lambda_j\}$ — собственные значения оператора $(-\Delta)$ с нулевыми граничными условиями в $L^2(\Omega_2)$, $\psi(x, \lambda_j)$ — соответствующая собственная функция, u_{out} — р.з.р. для области Ω_1, продолженное нулем на $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

3. Основные результаты сформулированы в теоремах 1 и 2.

Теорема 1. *Если λ_j — простое собственное значение, то существует такое $a_j > 0$, что при $d(\Omega) < a_j$ в круге $|\lambda_j - \lambda| < C_1 d(\Omega)^{1/2}$ у функций $u_\mp(\,,\sqrt{\lambda})$ есть точно одна особая точка: полюс первого порядка $\lambda_j^\mp(\Omega)$, причем $|\operatorname{Im}\lambda_j^\mp(\Omega)| < C_2 d(\Omega)$. Константы C_1 и C_2 зависят только от области Ω_1 и не зависят от Ω.*

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то существует такое $b_j > 0$, что при $d(\Omega) < a_j$, $|\lambda - \lambda_j| < b_j$ функция $u(\,,\sqrt{\lambda})$ представима в виде*

$$u_\mp(x, n, \sqrt{\lambda}) = \exp(i(n, x)\sqrt{\lambda}) + \varphi_j^\mp(x, \Omega)\omega_j^\mp(n, \lambda, \Omega) + S_j(n, \lambda, \Omega)(x),$$

где $\omega_j^\mp(n, \lambda, \Omega) = (\lambda - \lambda_j^\mp(\Omega))^{-1} e_j^\mp(n, \Omega)$, и введенные функции обладают свойствами

1. $\|u_{out} - (\exp(i, (\,, n)\sqrt{\lambda}) + S_j(n, \lambda, \Omega))\|_\gamma \to 0, \quad d(\Omega) \to 0;$

2. $(2\pi)^{-N} \int\limits_{|k^2-\lambda_j|<\sigma(\Omega)} |\omega_j^\mp(k, \Omega)|^2\, dk \to 1$, *если* $d(\Omega) \to 0, \sigma(\Omega) \to 0,$

$$\sigma^{-1}(\Omega)\, d(\Omega)^{1/2} \to 0;$$

3. $\|\varphi_j^\mp(\,, \Omega) - \psi(\,, \lambda_j)\|_\gamma \to 0$, *если* $d(\Omega) \to 0$;
4. $e_j^\mp(n, \Omega) \to 0$, *если* $d(\Omega) \to 0$.

Доказательство теорем 1 и 2 проводится по схеме, предложенной в ([3], [4]), и основано на оценке введенного в [3] параметра $\theta(1/\tau)$.

Автор благодарен Л. А. Муравью за консультацию.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Михайлов, ДАН, 159, № 4, 750 (1964). [2] P. D. Lax, R. S. Phillips, Comm. Pure and Appl. Math., 22, № 6 (1969). [3] А. А. Арсеньев, Дифференциальные уравнения, 5, № 10, 1854 (1969). [4] А. А. Арсеньев, ДАН, 185, № 3, 495 (1969).