Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 517.11:518.5 *МАТЕМАТИКА*

М. И. КАНОВИЧ

ОБ ОБЛАСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИФМОВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 28 X 1970)

Мы будем использовать понятия и терминологию работ ([1-4]).

1. В статье ([5]) А. Н. Колмогоров ввел понятие асимптотически оптимального алгорифма *. Можно показать, что область определения оптимального алгорифма, построенного в ([5]), является креативным множеством. Мы приведем ряд теорем об областях определения оптимальных алгорифмов.

1.1. Слова в алфавите $0|$ будем называть Д - с л о в а м и. Пусть $\mathfrak{A}$ — Ф-алгорифм, Д-слово Q будем называть $\mathfrak{A}$-к о д о м Д-слова P, если $\mathfrak{A}(Q) \simeq P$. Слово P назовем $(n, \mathfrak{A})$-с л о ж н ы м, если существует Д-слово Q длины не больше, чем n, являющееся $\mathfrak{A}$-кодом слова P.

Перенумеруем все Ф-алгорифмы в порядке возрастания длин их изображений **. Символом $\langle k \rangle$ будем обозначать Ф-алгорифм с номером k.

1.2. Пусть f — общерекурсивная функция двух переменных. Ф-алгорифм $\mathfrak{A}$ назовем f-о п т и м а л ь н ы м, если для любых натуральных чисел n и k всякое $(n, \langle k \rangle)$-сложное Д-слово является $(f(n, k), \mathfrak{A})$-сложным.

Из существования асимптотически оптимального алгорифма вытекает *осуществимость такого натурального числа C, что при любой общерекурсивной функции f двух переменных всякий f-оптимальный алгорифм является и $\lambda nk\ f(n + 3[\log_2 (k + 1)], C)$-оптимальным* ***.

Перенумеруем все Д-слова следующим образом:

$$\tau(\Lambda) \rightleftharpoons 0,$$

если Д-слово P не пусто, то

$$\tau(P) \rightleftharpoons \nu(P) + 2^{[P^\partial} - 1.$$

1.3. Булев вектор R *назовем* n - о т р е з к о м п е р е ч и с л и м о г о м н о ж е с т в а Д - с л о в $\mathfrak{M}$, если

1) $[R^\partial = 2^{n+1} - 1$;

2) для любого Д-слова P длины не больше n выполняется эквиваленция

$$\sigma_{\tau(P)+1}(R) \simeq | \equiv P \in \mathfrak{M}.$$

1.4. Пусть g — общерекурсивная функция. Будем говорить, что перечислимое множество Д-слов $\mathfrak{N}$ g-с в о д и т с я к перечислимому множеству Д-слов $\mathfrak{M}$, если осуществим Ф-алгорифм $\mathfrak{A}$ такой, что каковы бы ни были Д-слово P и $g([P^\partial)$-отрезок R множества $\mathfrak{M}$, алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову PaR и

$$\mathfrak{A}(PaR) \simeq \Lambda \equiv P \in \mathfrak{N}.$$

1.5. Пусть f — общерекурсивная функция двух переменных. Перечислимое множество Д-слов $\mathfrak{M}$ назовем f-у н и в е р с а л ь н ы м, если для любо-

* В работе ([6]) Г. Б. Маранджян рассматривает различные свойства таких алгорифмов.

** Алгорифмы, длины изображений которых одинаковы, нумеруются в лексикографическом порядке их изображений.

*** Мы будем употреблять λ-обозначения А. Черча (см. ([4]), § 10).

го перечислимого множества Д-слов $\mathfrak{N}$ можно указать натуральное число n такое, что множество $\mathfrak{N}$ λm $f(m, n)$-сводится к множеству $\mathfrak{M}$.

1.6. Под областью определения Ф-алгорифма $\mathfrak{A}$ понимаем множество всех Д-слов, к которым применим алгорифм $\mathfrak{A}$.

Теорема 1. *Существует общерекурсивная функция g такая, что при любой общерекурсивной функции f двух переменных область определения всякого f-оптимального алгорифма является λnk $f(n, g(k))$-универсальной.*

Теорема 2. *Пусть f — общерекурсивная функция двух переменных, $\mathfrak{M}$ — f-универсальное перечислимое множество Д-слов.*

Тогда для некоторого натурального числа C осуществим λnk $f(n + 3[\log_2 (k+1)] + C, C)$-оптимальный Ф-алгорифм $\mathfrak{A}$, область определения которого совпадает с множеством $\mathfrak{M}$.

1.7. Ф-алгорифм $\mathfrak{A}$ назовем оптимальным, если он является f-оптимальным для некоторой общерекурсивной функции f двух переменных.

Следствие 1. *Область определения любого оптимального алгорифма эффективно нерекурсивна*.*

Следствие 2. *Невозможен оптимальный алгорифм с гиперпростой областью определения.*

Следствие 3. *Можно построить асимптотически оптимальный алгорифм с эффективно простой областью определения**.*

Следствие 4. *Можно построить асимптотически оптимальный алгорифм с простой областью определения, не являющийся эффективно простой**.*

Следствие 5. *Осуществим асимптотически оптимальный алгорифм с мезоической областью определения**.*

2. В этом пункте мы приведем усиление следствия 1.

Используя теорему 1.1 из ([1]), § 4, гл. IV, нетрудно *построить Ф-алгорифм $\mathfrak{U}$ такой, что каков бы ни был Ф-алгорифм $\mathfrak{B}$, алгорифмы $\widetilde{\mathfrak{U}}_{\mathfrak{B}^a}$ и $\mathfrak{B}$ эквивалентны относительно алфавита $0|a$***.*

2.1. Пусть $\mathfrak{M}$ — перечислимое множество Ф-слов, n — натуральное число. Д-слово Q назовем $(\mathfrak{M}, n)$-разрешающим, если для любого Д-слова P *длины не больше* n

$$!\mathfrak{U}(QaP) \;\&\; (\mathfrak{U}(QaP) \simeq \Lambda \equiv P \in \mathfrak{M}).$$

2.2. Функцию f назовем нижней оценкой перечислимого множества Д-слов $\mathfrak{M}$, если при любом n длина всякого $(\mathfrak{M}, n)$-разрешающего Д-слова не меньше, чем $f(n)$.

2.3. Пусть f — общерекурсивная функция. Символом f^{-1} будем обозначать частично рекурсивную фнукцию, определяемую равенством

$$f^{-1}(k) \rightleftharpoons \mu n \quad (f(n) \geqslant k).$$

Нетрудно видеть, что f^{-1} — функция, «обратная» к f. Действительно,

1) $f^{-1}(f(n)) \leqslant n$,

2) *если* $!f^{-1}(n)$, *то* $f(f^{-1}(n)) \geqslant n$,

3) *если f — неограниченная неубывающая функция, то*

$$(f^{-1})^{-1}(n+1) = f(n) + 1.$$

Теорема 3. *Пусть f — общерекурсивная функция двух переменных, $\mathfrak{A}$ — f-оптимальный алгорифм.*

---

* Определение эффективной нерекурсивности см. в ([7]).

** Определения простого эффективно простого, мезоического множества см. в ([8]), гл. IV, § 8.

*** Обозначение $\widetilde{\mathfrak{U}}_P$ понимается так же, как в статье ([9]), обозначение $\mathfrak{B}^a$ понимается, как в ([10]).

Тогда можно указать такое натуральное число C, что функция

$$\lambda m\left((\lambda n\ f(n, C))^{-1}(m+1) \dot{-} C\right)$$

является нижней оценкой области определения алгорифма $\mathfrak{A}$.

Теорема 4. *Пусть f — неограниченная общерекурсивная нижняя оценка перечислимого множества Д-слов $\mathfrak{M}$.*

Тогда для некоторого натурального числа C осуществим $\lambda nk\ \ f^{-1}(n+3[\log_2(k+1)]+C)$-оптимальный Ф-алгорифм $\mathfrak{A}$, область определения которого совпадает с множеством $\mathfrak{M}$.

3. В статье ([11]) Я. М. Барздинь указал простое множество, для которого возможна вероятностная машина, «перечисляющая» с большой вероятностью бесконечные подмножества его дополнения. Можно показать, что построенное в ([11]) простое множество является f-универсальным для некоторой общерекурсивной функции f двух переменных. *Можно построить асимптотически оптимальный алгорифм с простой областью определения, обладающей таким же «вероятностным» свойством.* В этом пункте мы покажем, что условие универсальности не является существенным.

3.1. Ф-алгорифм $\mathfrak{A}$ назовем **преобразователем**, если при любом Д-слове P:

1) $!\mathfrak{A}(P)$;

2) $!\mathfrak{A}(P)$ есть a-словарь в алфавите $0|$;

3) слова $\mathfrak{A}(P0)$ и $\mathfrak{A}(P|)$ начинаются словом $\mathfrak{A}(P)$.

3.2. Перечислимые множества Д-слов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ назовем **эквивалентными**, если существует такая общерекурсивная функция f двух переменных, что $\mathfrak{N}$ f-сводится к $\mathfrak{M}$ и что $\mathfrak{M}$ f-сводится к $\mathfrak{N}$.

Теорема 5. *Для всякого перечислимого множества Д-слов $\mathfrak{M}$ можно указать эквивалентное ему перечислимое множество $\mathfrak{N}$ такое, что*

1) *если $\mathfrak{M}$ неразрешимо, то $\mathfrak{N}$ просто;*

2) *для любого натурального числа k можно указать преобразователь $\mathfrak{A}$ такой, что при любом n квазиосуществимы не менее, чем $(1-2^{-k})\cdot 2^n$ Д-слов P длины n таких, что*

а) *словарь $\mathfrak{A}(P)$ содержится в дополнении множества $\mathfrak{N}$*,*

б) *$(a, 0|)$-объем словаря $\mathfrak{A}(P)$ не меньше, чем $\sqrt{n} \dot{-} 2k$.*

Автор глубоко благодарен А. А. Маркову за внимание и советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 42 (1954). [2] А. А. Марков, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, 101 (1963). [3] А. А. Марков, Там же, 31, 161 (1967). [4] С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957. [5] А. Н. Колмогоров, Проблемы передачи информации, 1, в. 1, 3 (1965). [6] Г. Б. Маранджян, Изв. АН АрмССР, сер. математика, 4, № 1, 3 (1969). [7] М. И. Канович, ДАН, 192, № 4 (1970). [8] А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965. [9] Г. С. Цейтин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 67, 295 (1962). [10] М. И. Канович, ДАН, 190, № 1, 23 (1970). [11] Я. М. Барздинь, Там же, 189, № 4, 699 (1969).

* Т. е. никакой $(a, 0|)$-элемент словаря $\mathfrak{A}(P)$ не принадлежит множеству $\mathfrak{N}$.