Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 517.917 **МАТЕМАТИКА**

И. Т. КИГУРАДЗЕ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СИНГУЛЯРНОСТЯМИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 11 XI 1970)

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

правые части которой являются ω-периодическими по t функциями, т. е. $f_i(t+\omega, x_1, \ldots, x_n) \equiv f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $\omega \in (0, +\infty)$.

Задача о существовании и единственности периодического решения системы (1) с непрерывными или удовлетворяющими условиям Каратеодори правыми частями служит предметом многочисленных исследований (ряд важных результатов, полученных в этом направлении, собран в ([1]) и ([2])). В настоящей заметке эта задача исследуется в случае, когда функции $f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, вообще, не являются суммируемыми по t на отрезке $[0, \omega]$.

Ниже приняты следующие обозначения.

Запись $f(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(a, b)$ означает, что функция $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ при любом $r \in (0, +\infty)$ удовлетворяет условиям Каратеодори в области $a \leqslant t \leqslant b$, $-r \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant r$.

Через $L(a, b; t_1, \ldots, t_m)$ и $K(a, b; t_1, \ldots, t_m)$ обозначаются множества всех функций, принадлежащих соответственно $L(\alpha, \beta)$ и $K(\alpha, \beta)$ для любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, который не содержит точек t_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Теорема 1. *Пусть в области* $0 \leqslant t \leqslant \omega$, $-\infty < x_1, \ldots, x_n < +\infty$ *выполняются неравенства*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign}(\sigma_i \varkappa_i) \leqslant p_i(t)|x_i| + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)|x_j| + q_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

где $\sigma_i = 1$ *или* -1, *функции* $p_{ij}(t)$ *и* $q_i(t)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *неотрицательны и суммируемы на* $[0, \omega]$, *а функции* $p_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *неположительны и отличны от нуля на множестве положительной меры. Пусть далее для каждого* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *либо*

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(0, \omega) \text{ и } p_i(t) \in L(0, \omega), \tag{3}$$

либо найдутся такие числа $\tau_{ij} \in [0, \omega]$ $(j = 1, \ldots, \nu_i)$, *что* $\tau_{ij} > 0$ *при* $\sigma_i = 1$, $\tau_{ij} < \omega$ *при* $\sigma_i = 1$,

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \in K(0, \omega; \tau_{i1}, \ldots, \tau_{i\nu_i}), \quad p_i(t) \in L(0, \omega; \tau_{i1}, \ldots, \tau_{i\nu_i}) \tag{4}$$

и

$$\left| \int_{\tau_{ij}}^{\tau_{ij} - \sigma_i \delta} p_i(t)\, dt \right| = +\infty \quad (j = 1, \ldots, \nu_i) \tag{5}$$

при любом достаточно малом $\delta > 0$. Если, кроме того, все собственные числа матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = \alpha_i \int\limits_0^\omega p_{ij}(\tau)\,d\tau$, $\alpha_i = 1 + \Bigl[1 - \exp\Bigl(\int\limits_0^\omega p_i(t)\,dt\Bigr)\Bigr]^{-1}$ при $p_i(t) \in L(0, \omega)$ и $\alpha_i = 2$ при $p_i(t) \notin L(0,\omega)$, по модулю меньше единицы, то система (1) *имеет ω-периодическое решение.*

Доказательство. Мы должны доказать существование абсолютно непрерывных на $[0, \omega]$ функций $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, 2)$, удовлетворяющих системе (1) при почти всех $t \in [0, \omega]$ и условиям

$$x_i(0) = x_i(\omega) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Подберем $\beta > 0$ настолько малым, чтобы все собственные числа матрицы $A_\beta = \Bigl((\alpha_i + \beta) \int\limits_0^\omega p_{ij}(t)\,dt\Bigr)$ были по модулю меньше единицы. Обозначим через I_1 и I_2 множества тех i, для которых соответственно соблюдаются условия (3) и (4). Для любого $i \in I_2$ через $\Delta_{1i}(\gamma)$ и $\Delta_{2i}(\gamma)$ обозначим множества

$$\Delta_{1i}(\gamma) = \bigcup_{j=1}^{\nu_i} [\tau_{ij} - \gamma, \tau_{ij} + \gamma] \cap [0, \omega], \quad \Delta_{2i}(\gamma) = [0, \omega] \diagdown \Delta_{1i}(\gamma).$$

Если $i \in I_1$, то положим

$$f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \text{ и } g_{ik}(t) \equiv p_i(t),$$

а если $i \in I_2$, то

$$f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) = g_{ik}(t) = 0 \text{ при } t \in \Delta_{1i}(\mu / k),$$

$$f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \text{ и } g_{ik}(t) = p_i(t) \text{ при } t \in \Delta_{2i}(\mu / k),$$

где $\mu > 0$ настолько мало, что

$$\alpha_{ik} = \Bigl[1 - \exp\Bigl(\int\limits_0^\omega g_{ik}(t)\,dt\Bigr)\Bigr]^{-1} + 1 < \alpha_i + \beta \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sigma_i g_{ik}(t)\, x_i + h_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

где k — произвольное натуральное число,

$$h_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) = \chi\Bigl(\sum_{j=1}^n |x_j|\Bigr) [f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) - \sigma_i g_{ik}(t)\, x_i],$$

$$\chi(s) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 \leqslant s \leqslant \rho_0, \\ 2 \text{ при } \rho_0 < s < 2\rho_0, \\ 0 \text{ при } s \geqslant 2\rho_0, \end{cases} \tag{9}$$

ρ_0 — сумма абсолютных значений компонентов вектора $(E - A_\beta)^{-1}\bar b$, E — единичная матрица, а $\bar b$ — вектор-столбец с компонентами

$$(\alpha_i + \beta) \int\limits_0^\omega q_i(t)\,dt \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Очевидно, что в области $0 \leqslant t \leqslant \omega$, $-\infty < x_1, \ldots, x_n < +\infty$ соблюдаются неравенства

$$|h_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant f_{ik}^*(t) + 2\rho_0 g_{ik}(t) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $g_{ik}(t) \in L(0, \omega)$ и

$$f_{ik}^*(t) = \sup\Bigl\{|f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n)| : \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant 2\rho_0\Bigr\} \in L(0, \omega).$$

С другой стороны, система

$$\frac{dx_i}{dt} = g_{ik}(t)\,x_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

не имеет нетривиального решения, удовлетворяющего условиям (6). Поэтому (см. ([3]), теорема 1) задача (8) — (6) имеет решение $x_{ik}(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

В силу (2)

$$\sigma_i \frac{d\,|x_{ik}(t)|}{dt} \leqslant g_{ik}(t)\,|x_{ik}(t)| + \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)\,|x_{jk}(t)| + q_i(t) \text{ при } t \in [0, \omega]$$
$$(i = 1, \ldots, n).$$

Поэтому

$$|x_{ik}(t)| \leqslant |x_{ik}^0| \exp\Bigl(\sigma_i \int_{t_i}^{t} g_{ik}(\tau)\,d\tau\Bigr) +$$
$$+ \Bigl|\int_{t_i}^{t} \Bigl[\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(\tau)\,|x_{jk}(\tau)| + q_i(\tau)\Bigr] \exp\Bigl(\sigma_i \int_{\tau}^{t} g_{ik}(s)\,ds\Bigr) d\tau\Bigr|$$
$$\text{при } t \in [0, \omega] \ (i = 1, \ldots, n), \tag{10}$$

где $x_{ik}{}^0 = x_{ik}(0) = x_{ik}(\omega)$, $t_i = 0$ при $\sigma_i = 1$ и $t_i = \omega$ при $\sigma_i = -1$.

Учитывая (7), из (10) находим

$$\bar{\rho}_k \leqslant A_\beta \bar{\rho}_k + \bar{b},$$

где $\bar{\rho}_k$ — вектор-столбец с компонентами $\rho_{ik} = \max\{|x_{ik}(t)| : t \in [0, \omega]\}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Отсюда, ввиду неотрицательности $(E - A_\beta)^{-1}$, вытекает, что $\bar{\rho}_k \leqslant (E - A_\beta)^{-1}\bar{b}$ и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{ik}(t)| \leqslant \rho_0 \text{ при } t \in [0, \omega]. \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует, что $x_{ik}(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ является решением системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_{ik}(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и

$$|x_{ik}'(t)| \leqslant f_i^*(t) \quad \text{при } t \in [0, \omega] \quad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

где $f_i^*(t) = \sup\{|f_i(t, x_1, \ldots, x_n)| : \sum_{j=1}^{n}|x_j| \leqslant 2\rho_0\}$.

Ввиду (12) ясно, что при $i \in I_1$ последовательность $\{x_{ik}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна на $[0, \omega]$. Предположим теперь, что $i \in I_2$ и $\sigma_i = 1$. В силу (5) для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число k_0 и такое положительное число γ, что $\gamma < \min\{\tau_{ij}, |\tau_{ij} - \tau_{ik}|\}$ $(j \neq k;\ k = 1, \ldots, n)$ и

$$\rho_{ik}(t) = \rho_0 \exp\Bigl(\int_0^t g_{ik}(s)\,ds\Bigr) + \int_0^t q_i^*(\tau) \exp\Bigl(\int_\tau^t g_{ik}(s)\,ds\Bigr) d\tau < \varepsilon/2$$
$$\text{при } t \in \Delta_{1i}(\gamma) \ (k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots), \tag{13}$$

где $q_i^*(t) = q_i(t) + 2\rho_0 \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t)$. Пусть $\delta \in (0, \gamma/2)$ настолько мало, что

$$\int_s^t f_i^*(\tau)\,d\tau < \varepsilon \text{ при } [s, t] \subset \Delta_{2i}(\gamma/2) \text{ и } 0 < t - s \leqslant \delta \tag{14}$$

и

$$\int_s^t f_{ik}^*(\tau)\,d\tau < \varepsilon \text{ при } 0 \leqslant s < t \leqslant \omega \text{ и } t-s \leqslant \delta \quad (k=1,\ldots,k_0). \qquad (15)$$

Очевидно, что если $0 \leqslant s < t \leqslant \omega$ и $t-s \leqslant \delta$, то либо $[s, t] \subset \Delta_{1i}(\gamma)$, либо $[s, t] \subset \Delta_{2i}^*(\gamma/2)$. В первом случае из (10), (11) и (13) вытекает, что

$$|x_{ik}(t) - x_{ik}(s)| \leqslant \rho_{ik}(t) + \rho_{ik}(s) < \varepsilon \quad (k = k_0+1, k_0+2, \ldots),$$

а во втором случае согласно (14)

$$|x_{ik}(t) - x_{ik}(s)| \leqslant \int_s^t f_{ik}^*(t)\,dt < \varepsilon \quad (k=1, 2, \ldots).$$

С другой стороны, в силу (15),

$$|x_{ik}(t) - x_{ik}(s)| \leqslant \int_s^t f_i^*(\tau)\,d\tau < \varepsilon \text{ при } 0 \leqslant s < t \leqslant \omega, \quad t-s<\delta$$
$$(k=1,\ldots,k_0).$$

Следовательно, последовательность $\{x_{ik}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна на $[0, \omega]$. Совершенно аналогично покажем, что она является равностепенно непрерывной на $[0, \omega]$ и при $i \in I_2$ и $\sigma_i = -1$.

Поскольку последовательности $\{x_{ik}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ $(i=1,\ldots,n)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[0, \omega]$, согласно лемме Арцела — Аскали, без ограничения общности можем считать, что они равномерно сходятся. Очевидно, что $x_i(t) = \lim\limits_{k\to\infty} x_{ik}(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ непрерывны на $[0, \omega]$, абсолютно непрерывны на каждом сегменте, который не содержит точек τ_{ij} $(i \in I_2, j=1,\ldots,\nu_i)$, удовлетворяют системе (1) при почти всех $t \in [0, \omega]$ и условиям (6). Кроме того, $\sigma_i \dfrac{d\,|x_i(t)|}{dt} \leqslant q_i^*(t)$ при $t \in [0, \omega]$, где $q_i^*(t) \in L(0, \omega)$ $(i=1,\ldots,n)$, поэтому легко заключить, что $x_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ абсолютно непрерывны на $[0, \omega]$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $f_i(t, x_1,\ldots,x_n) \in K(0, \omega; \tau_{i1},\ldots,\tau_{i\nu_i})$ $(i = 1,\ldots,n)$ *и в области* $0 \leqslant t \leqslant \omega$, $-\infty < x_1,\ldots,x_n < +\infty$ *выполняются неравенства* (2), *где* $p_i(t) = a_i(t-\tau_{i1})\ldots(t-\tau_{i\nu_i})$, $a_i<0$, $\sigma_i = 1$ *или* -1, $0 < \tau_{ij} \leqslant \omega$ *при* $\sigma_i = 1$ *и* $0 \leqslant \tau_{ij} < \omega$ *при* $\sigma_i = -1$, *а функции* $p_{ij}(t)$ *и* $q_i(t)$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ *неотрицательны и суммируемы на* $[0, \omega]$. *Пусть далее все собственные числа матрицы* $A = (a_{ij})$, *где* $a_{ij} = 2\int_0^\omega p_{ij}(t)dt$, *по модулю меньше единицы.*

Тогда система (1) *имеет* ω*-периодическое решение.*

Теорема 2. *Пусть при* $0 \leqslant t \leqslant \omega$, $-\infty < x_j, y_j < +\infty$ $(j=1,\ldots,n)$ *выполняются неравенства*

$$[f_i(t, x_1,\ldots,x_n) - f_i(t, y_1,\ldots,y_n)]\operatorname{sign}[\sigma_i(x_i-y_i)] \leqslant$$
$$\leqslant p_i(t)\,|x_i - y_i| + \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)\,|x_j - y_j| \quad (i=1,\ldots,n),$$

где σ_i, $p_i(t)$ *и* $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.

Тогда система (1) *имеет не более одного* ω*-периодического решения.*

Научно-исследовательский институт
прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
4 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, М., 1966. [2] В. А. Плисс, Нелокальные проблемы теории колебаний, М.—Л., 1964. [3] J. Barbalat, A. Halanay, Rev. math. pures et Appl., 3, № 3, 395 (1958).