Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 517.522.3+517.945 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ИЛЬИН

К ВОПРОСУ О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ И В N-КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 II 1971)

Теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям и в интеграл (или соответственно в ряд) Фурье в случае краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений справедливы для произвольной функции $f(x)$ из класса L_2 (или соответственно L_1 *). Для эллиптических уравнений в частных производных удалось установить некоторые теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям произвольной N-мерной области и в N-кратный интеграл Фурье **, но лишь для функции $f(x)$, удовлетворяющей высоким требованиям гладкости. Целью настоящей работы является выяснение точных требований гладкости на функцию $f(x)$, обеспечивающих равносходимость ее разложений по собственным функциям N-мерной области и в N-кратный интеграл Фурье ***.

Будем рассматривать простейший эллиптический оператор — оператор Лапласа. Наиболее точные условия равносходимости разложений по всем неотрицательным самосопряженным расширениям оператора Лапласа **** вытекают из результатов [4–6] и заключаются в принадлежности финитной относительно всех рассматриваемых N-мерных областей функции $f(x)$ одному из классов ***** C^α, W_2^α, H_2^α или L_2^α с порядком дифференцируемости α, удовлетворяющим условию $\alpha \geqslant (N-1)/2$.

Естественно возникает вопрос, будет ли справедлива теорема о равносходимости разложений по собственным функциям и в N-кратный интеграл Фурье и для финитной функции $f(x)$, принадлежащей одному из указанных выше классов с порядком дифференцируемости α, меньшим числа $(N-1)/2$. Отрицательный ответ на этот вопрос дает

Основная теорема. *Пусть G — N-мерный шар с центром в точке x_0, символ $S_\lambda(x, f)$ обозначает спектральное разложение функции $f(x)$ по собственным функциям шара G, отвечающим краевому условию первого рода, а символ $\bar{S}_\lambda(x, f)$ — спектральное разложение $f(x)$ в N-кратный интеграл Фурье.*

Тогда для любого $\alpha < (N-1)/2$ существует функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $f(x)$ имеет расположенный внутри G компактный носитель и обращается в нуль в некоторой окрестности точки x_0;

2) $f(x)$ принадлежит каждому из классов C^α, W_p^α, H_p^α и L_p^α с любым $p \geqslant 1$;

3) разность спектральных разложений $S_\lambda(x_0, f) - \bar{S}_\lambda(x_0, f)$ функции $f(x)$ неограничена при $\lambda \to \infty$.

---

* См., например, [1], стр. 24—27 и 237—254.

** См., например, [2] и [3].

*** Под равносходимостью двух разложений мы, как обычно, понимаем стремление к нулю разности этих разложений.

**** Одним из таких расширений является расширение, отвечающее разложению в N-кратный интеграл Фурье.

***** Определение классов Зигмунда — Гёльдера C^α, Соболева W_p^α, Никольского H_p^α и Лиувилля L_p^α см., например, в [7].

Основная теорема устанавливает окончательный порядок дифференцируемости $\alpha < (N-1)/2$, не обеспечивающий справедливости теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям и в N-кратный интеграл Фурье (при $\alpha \geqslant (N-1)/2$ эта теорема, как уже отмечалось, справедлива).

Основная теорема показывает, что для финитных функций, принадлежащих какому-либо из классов C^α, $W_p{}^\alpha$, $H_p{}^\alpha$ или $L_p{}^\alpha$, при любых α и p, удовлетворяющих условиям $\alpha < (N-1)/2$, $p \geqslant 1$, расходимость разложения в N-кратный интеграл Фурье не несет, вообще говоря, никакой информации о расходимости разложения по собственным функциям. Но именно для таких функций $f(x)$ в ([5-6]) установлены теоремы негативного типа (т. е. теоремы об условиях, не обеспечивающих даже локализации спектральных разложений, отвечающих произвольному неотрицательному самосопряженному расширению оператора Лапласа). Стало быть, установленные в ([5-6]) теоремы негативного типа принципиально невозможно получить на пути изучения разложения функции в N-кратный интеграл Фурье.

Схема доказательства основной теоремы. Фиксируем произвольное $\alpha < (N-1)/2$ и некоторый кольцевой слой E, лежащий строго внутри шара G и не содержащий точку x_0. Обозначим символом $\{u_j(x)\}$ множество нормированных собственных функций шара G, символом $\{\lambda_j\}$ — множество соответствующих им собственных значений (занумерованных в порядке возрастания), символом $\{u_n(x)\}$ — подмножество собственных функций шара G, обладающих радиальной симметрией, символом $\{\lambda_n\}$ — подмножество соответствующих им собственных значений (также занумерованных в порядке возрастания). Пусть $T_\alpha(x, y)$ и $\overline{T}_\alpha(x, y)$ — ядра порядка $\alpha < (N-1)/2$, отвечающие соответственно разложениям по собственным функциям шара G и в N-кратный интеграл Фурье *. Положив $x = x_0$, рассмотрим разность спектральных разложений, отвечающих этим ядрам:

$$R_\lambda(x_0, y) = \sum_{\lambda_j < \lambda} u_j(x_0)\, u_j(y)\, (1+\lambda_j)^{-\alpha/2} - \\ - (2\pi)^{-N} \int\limits_{|\xi|^2 < \lambda} e^{i(x_0 - y,\, \xi)} (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}\, d\xi. \qquad (1)$$

Для каждого «радиального» собственного значения λ_n выберем отвечающее ему положительное число $\Delta\lambda_n$ и докажем, что при достаточно малом $\Delta\lambda_n$ числовая последовательность

$$a_n = \int\limits_E |R_{\lambda_n + \Delta\lambda_n}(x_0, y) - R_{\lambda_n}(x_0, y)|\, dy \qquad (2)$$

является неограниченной. В самом деле, поскольку $u_j(x_0) = 0$ для всех собственных функций, не обладающих радиальной симметрией, то при любом $\Delta\lambda_n$ из интервала $0 < \Delta\lambda_n < \lambda_{n+1} - \lambda_n$

$$R_{\lambda_n + \Delta\lambda_n}(x_0, y) - R_{\lambda_n}(x_0, y) = u_n(x_0)\, u_n(y)\, (1+\lambda_n)^{\alpha/2} - \\ - (2\pi)^{-N} \int\limits_{\lambda_n \leqslant |\xi|^2 < \lambda_n + \Delta\lambda_n} e^{i(x_0 - y,\, \xi)} (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}\, d\xi. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) заключаем, что

$$a_n \geqslant |u_n(x_0)|\, (1+\lambda_n)^{-\alpha/2} \int\limits_E |u_n(y)|\, dy - \\ - (2\pi)^{-N} \int\limits_E \Big| \int\limits_{\lambda_n \leqslant |\xi|^2 < \lambda_n + \Delta\lambda_n} e^{i(x_0 - y,\, \xi)} (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}\, d\xi \Big|\, dy. \qquad (4)$$

---

* Ядра $T_\alpha(x, y)$ и $\overline{T}_\alpha(x, y)$ определяются как такие функции, разложения которых (при любой фиксированной точке x) соответственно равны $\Sigma u_j(x) u_j(y) (1 + \lambda_j)^{-\alpha/2}$ и $(2\pi)^{-N} \int e^{i(x-y,\,\xi)} (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$ (см., например, ([6])).

Теперь для доказательства неограниченности $\{a_n\}$ достаточно заметить, что последнее слагаемое в (4) при достаточно малом $\Delta\lambda_n$, во всяком случае, ограничено равномерно относительно n, а первое слагаемое в правой части (4) неограниченно возрастает при $n \to \infty$ в силу того, что существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ такие, что $|u_n(x_0)| \geqslant \alpha \cdot \lambda_n^{(N-1)/4}$, $\int\limits_E |u_n(y)|\, dy \geqslant \beta$ для всех достаточно больших n (см. ([8]) и ([3]), стр. 169).

Из неограниченности (2) и из теоремы резонансного типа (см. ([9]), стр. 31) заключаем, что существует непрерывная в слое E функция $h(y)$ такая, что последовательность

$$b_n = \int\limits_E [R_{\lambda_n+\Delta\lambda_n}(x_0, y) - R_{\lambda_n}(x_0, y)]\, h(y)\, dy \tag{5}$$

неограничена. Функцию $h(y)$ мы продолжим на все E_N, полагая ее равной нулю вне E, и введем в рассмотрение две функции

$$F(x) = \int T_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy, \quad \overline{F}(x) = \int \overline{T}_\alpha(x, y)\, h(y)\, dy. \tag{6}$$

Из определения ядер T_α и $\overline{T}_\alpha$ легко убедиться, что последовательность (5) совпадает с последовательностью

$$[S_{\lambda_n+\Delta\lambda_n}(x_0, F) - S_{\lambda_n}(x_0, F)] - [\overline{S}_{\lambda_n+\Delta\lambda_n}(x_0, \overline{F}) - \overline{S}_{\lambda_n}(x_0, \overline{F})], \tag{7}$$

которая тем самым является неограниченной.

Воспользуемся теперь известными (см., например, ([6])) представлениями ядер T_α и $\overline{T}_\alpha$:

$$T_\alpha(x, y) = \varphi_\alpha(x, y) + \psi_\alpha(x, y), \quad \overline{T}_\alpha(x, y) = \varphi_\alpha(x, y) + \overline{\psi}_\alpha(x, y). \tag{8}$$

В равенствах (8) $\varphi_\alpha(x, y)$ одна и та же для обоих разложений функция, имеющая вид

$$\varphi_\alpha(x, y) = \begin{cases} C(\alpha, N)\, r_{xy}^{(\alpha-N)/2} K_{(N-\alpha)/2}(r_{xy}) + \sum\limits_{k=0}^{n} a_k r_{xy}^{2k} & \text{при} \quad r_{xy} < h, \\ 0 & \text{при} \quad r_{xy} \geqslant h, \end{cases} \tag{9}$$

так что $C(\alpha, N) = 2\left[(2\pi)^{N/2}\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2^{\alpha/2}\right]^{-1}$, h — любое положительное число; x — любая точка G, удаленная от границы G больше чем на h; n — любой фиксированный номер; r_{xy} — расстояние произвольной точки y от x; $K_\nu(r)$ — так называемая функция Макдональда; a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — постоянные числа, фиксированные так, что $\varphi_\alpha(x, y)$ всюду при $x \neq y$ имеет непрерывные частные производные до порядка n включительно; функции $\psi_\alpha(x, y)$ и $\overline{\psi}_\alpha(x, y)$ представляют собой сумму билинейного ряда (соответственно интеграла), который с увеличением n как угодно быстро убывает по $\lambda_j(|\xi|)$.

В силу (6) и (8) $F(x) = f(x) + g(x)$, $\overline{F}(x) = f(x) + \overline{g}(x)$, где $f(x) = \int \varphi_\alpha(x, y) h(y)\, dy$, $g(x) = \int \psi_\alpha(x, y) h(y)\, dy$, $\overline{g}(x) = \int \overline{\psi}_\alpha(x, y) h(y)\, dy$. Так как из свойств ψ_α и $\overline{\psi}_\alpha$ вытекает сходимость разложений $S_\lambda(x_0, g)$ и $\overline{S}_\lambda(x_0, \overline{g})$ при $\lambda \to \infty$, то из неограниченности (7) вытекает неограниченность последовательности

$$[S_{\lambda_n+\Delta\lambda_n}(x_0, f) - S_{\lambda_n}(x_0, f)] - [\overline{S}_{\lambda_n+\Delta\lambda_n}(x_0, f) - \overline{S}_{\lambda_n}(x_0, f)],$$

из которой, в свою очередь, вытекает неограниченность при $\lambda \to \infty$ разности $S_\lambda(x_0, f) - \overline{S}_\lambda(x_0, f)$. Считая, что число h в (9) фиксировано меньшим расстояния слоя E от границы шара G и от x_0, мы получим, что функция $f(x)$ имеет расположенный внутри G компактный носитель и обращается в нуль в окрестности x_0. Из ([7]) вытекает, что $f(x) \in C^{\alpha'}(E_N)$ при любом $\alpha' < \alpha$. Так как α — любое число, меньшее $(N-1)/2$, а α' — любое число, меньшее α, то основная теорема доказана.

Автор благодарит Ш. А. Алимова за просмотр рукописи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, 1, ИЛ, 1960. [2] Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, 437 (1956). [3] G. Bergendal, Thesis, Lund, 1959, p. 1. [4] В. А. Ильин, УМН, 13, № 1, 87 (1958). [5] В. А. Ильин, УМН, 23, № 2, 61 (1968). [6] Ш. А. Алимов, В. И. Ильин, ДАН, 193, № 1, 9 (1970). [7] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [8] В. А. Ильин, ДАН, 160, № 3, 523 (1965). [9] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958.