Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 517.432 *МАТЕМАТИКА*

К. ТЕЛЬНЕР

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОЖИТЕЛЕЙ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В L_p

(Представлено академиком В. М. Смирновым 10 X 1969)

1. Преобразованием множителей будем называть операцию, сопоставляющую всякому псевдодифференциальному (пс.д.) оператору K с символом $K(\xi, x)$, т. е.

$$(Ku)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_{R^m} K(\xi, x)\, e^{i\langle \xi, x\rangle} \hat{u}(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

новый пс.д. оператор ΦK с символом $\varphi(\xi, x) K(\xi, x)$, т. е.

$$(\Phi K u)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_{R^m} \varphi(\xi, x)\, K(\xi, x)\, e^{i\langle \xi, x\rangle} \hat{u}(\xi)\, d\xi. \tag{2}$$

Здесь R^m — m-мерное эвклидово пространство; x и ξ — точки из R^m; $\langle \xi, x\rangle = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_m x_m$; $\hat{u}$ — преобразование Фурье функции $u \in S$, где S — пространство быстро убывающих функций. Для однородных степени 0 (по ξ) символов пс.д. оператор вида (1) является сингулярным интегральным (с.и.) оператором.

Ставится вопрос, при каких условиях преобразование $K \to \Phi K$ сохраняет непрерывность пс.д. операторов в различных функциональных пространствах. Для пространств $L_2(R^m)$ и $W_2^s(R^m)$ Соболева — Слободецкого эта задача исследовалась в работах ([1–5]). Цель настоящей заметки — сообщить два результата о преобразованиях множителей в пространствах $L_p(R^m)$.

2. Дадим описание пространств функций, через которые будут выражаться условия теорем 1 и 2.

а) Введем кольца $\mathfrak{A}_l = \{\xi \in R^m\colon\ 2^{l-2} \leqslant |\xi| \leqslant 2^{l+2}\}$; $l = 0, \pm 1, \ldots$ Через $L_p^{\alpha,\beta}$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$ обозначается пространство всех обобщенных функций $\varphi(\xi)$, принадлежащих $L_p^{\alpha}(\mathfrak{A}_l)$ (см. ([1])) при каждом l и для которых конечна полунорма $\|\varphi\|_{L_p^{\alpha,\beta}}$, где

$$\|\varphi\|^p_{L_p^{\alpha,\beta}} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2^{l\beta p} \|\varphi\|^p_{L_p^{\alpha}(\mathfrak{A}_l)}.$$

Если $\alpha = N$ — целое число, то $\|\varphi\|_{L_p^{N,\beta}}$ эквивалентно интегральной полунорме

$$\Big(\sum_{|\nu|=N} \int_{R^m} |\xi|^{\beta p} |D^{\nu}\varphi(\xi)|^p d\xi\Big)^{1/p}.$$

б) Через $L_{\infty;\,x}(L^{\alpha,\beta}_{p;\,\xi})$ будем обозначать пространство всех функций $\varphi(\xi, x)$, принадлежащих при почти всех $x \in R^m$ пространству $L_p^{\alpha,\beta}$ (относительно переменной ξ) и для которых конечна полунорма

$$\|\varphi\|_{L_{\infty;x}(L^{\alpha,\beta}_{p;\xi})} \equiv \operatorname*{vrai\,sup}_{x\in R^m} \|\varphi(\cdot, x)\|_{L^{\alpha,\beta}_p}.$$

в) Пусть S^{m-1} — единичная сфера пространства R^m; θ — ее точки. Через $W_p{}^\alpha(S^{m-1})$ обозначается пространство Соболева — Слободецкого функций $\varphi(\theta)$, заданных на сфере S^{m-1}. Пространство $L_{\infty;x}(W^\alpha_{p;\theta}(S^{m-1}))$ определяется по аналогии с пунктом б).

3. Сформулируем результаты заметки.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие два условия:*

(I) $\varphi(\xi, x) \in L_{\infty;x}(W^\alpha_{2;\xi}(R^m))$ *при некотором* $\alpha > m/2$.

(II) $\varphi(\xi, x) \in L_{\infty;x}(L^{m/2+\beta,\beta}_{2;\xi})$ *при некотором* $\beta > 0$.

Если $|1/p - {}^1/_2| < \beta/m$ $(1 < p < \infty)$, *то справедливо следующее заключение:*

Для каждого оператора K вида (1) *с локально суммируемым символом $K(\xi, x)$, непрерывного в $L_p(R^m)$, оператор ΦK вида* (2) *также непрерывен в $L_p(R^m)$. При этом*

$$\|\Phi K\|_{L_p\to L_p} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{L_\infty(W_2^\alpha)} + \|\varphi\|_{L_\infty(L_2^{m/2+\beta,\beta})}\right)\|K\|_{L_p\to L_p}.$$

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi(\xi, x)$ однородна степени 0 по ξ. Если** $\varphi(\theta, x) \in L_{\infty;x}(W^\alpha_{2;\theta}(S^{m-1}))$, *то при* $\alpha > (m-1)/2 + m|1/p - {}^1/_2|$ $(1 < p < \infty)$ *справедливо заключение теоремы* 1. *При этом*

$$\|\Phi K\|_{L_p\to L_p} \leqslant C\|\varphi\|_{L_\infty(W_2^\alpha)} \|K\|_{L_p\to L_p}.$$

4. В пространстве $L_2(R^m)$ сформулированная проблема множителей включается в теорию двойных операторных интегралов ([1], [4]), использование которой приводит к разнообразным результатам. При исследовании той же проблемы в пространствах $L_p(R^m)$ общие методы гильбертова пространства, применяющиеся в ([1-4]), непригодны. Однако некоторые элементы метода интегральных сумм, развитого в ([1]), удается использовать при доказательстве теорем 1 и 2. Идея заключается в аппроксимации множителей $\varphi(\xi, x)$ функциями специального вида — кусочно-полиномиальными приближениями, отвечающими подходящим разбиениям пространства R^m. Эта идея сочетается с применением новых результатов Петре ([6]) и Литтмана, Мак Карти, Ривьере ([7]) о мультипликаторах интегралов Фурье и об оценках типа Литлвуда — Палея.

5. Поскольку символ единичного оператора равен $K(\xi, x) \equiv 1$, то в наших результатах содержится следующее утверждение.

Следствие. *В условиях теорем* 1 *и* 2 *пс.д. (с.и.) оператор с символом $\varphi(\xi, x)$ ограничен в $L_p(R^m)$.*

Заметим, что признак ограниченности с.и. оператора в $L_p(R^m)$, вытекающий как частный результат из теоремы 2, при $p < 2$ несколько улучшает результат С. Г. Михлина (([8]), теорема V.1.26). При $p > 2$ условия теоремы 2 более ограничительны, чем условия С. Г. Михлина; это связано с тем, что последние не носят мультипликаторного характера.

Другие условия ограниченности пс.д. операторов в $L_p(R^m)$ указаны в случае $p = 2$ Л. Хёрмандером ([9]), отсюда В. М. Каган ([10]) вывел аналогичный признак для произвольных p. Оба результата также не имеют мультипликаторного характера. Условия Кагана и теоремы 1 настоящей работы не покрывают друг друга.

---

* Сужение функции $\varphi(\xi, x)$ на сферу S^{m-1} (по первой переменной) обозначим через $\varphi(\theta, x)$.

Автор выражает искреннюю благодарность М. З. Соломяку за постановку задачи и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 X 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Сборн. Проблемы математической физики, в. 2, Л., 1967, стр. 26. [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Вестн. ЛГУ, № 13, 21 (1967). [3] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Вестн. ЛГУ, № 1, 35 (1969). [4] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Изв. высш. учебн. завед., математика, № 9 (88) (1969). [5] К. Тельнер, Вестн. ЛГУ, № 1 (1970). [6] J. Peetre, Ricerche di Mat., **15**, F. 1°, 3 (1966). [7] W. Littman, Ch. Mc. Carthy, N. Rivière, Studia Math., **30**, № 2, 193 (1968). [8] С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1963. [9] Л. Хёрмандер, Сборн. Псевдодифференциальные операторы, М., 1967, стр. 297. [10] В. М. Каган, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 6 (73), 35 (1968).