Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 517.5 *МАТЕМАТИКА*

В. Б. КОРОТКОВ

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 4 XII 1970)

В работах Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха ([1]), И. М. Гельфанда ([2]), Н. Данфорда и Б. Петтиса ([3]), посвященных аналитическим представлениям линейных операторов, впервые были выделены и изучены широкие классы линейных операторов, представимых в интегральной форме с ядрами определенных типов.

В нашей работе рассматриваются новые классы операторов, имеющих интегральное представление. В работе рассматриваются также некоторые варианты задачи об условиях представимости операторов в интегральной форме с ядрами, удовлетворяющими заданным условиям.

1°. Обозначения и определения. (S, Σ, μ) — пространство с положительной σ-конечной мерой (([4]), стр. 141), P — поле вещественных чисел (R) или комплексных чисел, X — банахово пространство над полем P, $M(S, \mu, X)$ — метрическое пространство μ-измеримых функций со значениями в X (([4]), стр. 120), $\mathscr{L}$ — линейное многообразие в X, $\mathscr{K}$ — нормальное подпространство (([5]), стр. 61) пространства $M(S, \mu, R)$.

Определение 1. Линейный оператор $T\colon \mathscr{L} \to M(S, \mu, P)$ назовем C-оператором, если существует $\varphi^* \in M(S, \mu, X^*)$, что для всех $x \in \mathscr{L}$

$$(Tx)(\cdot) = \varphi^*(\cdot)x. \tag{1}$$

Определение 2. Линейный оператор $T\colon X^* \to M(S, \mu, P)$ назовем C^*-оператором, если существует $\varphi \in M(S, \mu, X)$, что для всех $x^* \in X^*$

$$(Tx^*)(\cdot) = x^*\varphi(\cdot); \tag{2}$$

φ^* в (1) (соответственно φ в (2)) будем называть измеримым ядром C-оператора (соответственно C^*-оператора) T.

Операторы вида (1) со слабо измеримыми ядрами рассматривались в ([1], [2]).

Определение 3. Будем говорить, что линейный оператор $T\colon \mathscr{L} \to M(S, \mu, P)$ имеет мажоранту, если существует $\Lambda \in M(S, \mu, R)$, что для всех $x \in \mathscr{L}$

$$|Tx| \leqslant \Lambda\|x\|; \tag{3}$$

Λ в (3) назовем мажорантой оператора T.

2°. Теорема 1. *Пусть X — рефлексивное пространство. Для того чтобы линейный оператор $T\colon \mathscr{L} \to M(S, \mu, P)$ был C-оператором с измеримым ядром φ^*, удовлетворяющим условию $\|\varphi^*(\cdot)\| \in \mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор T имел мажоранту $\Lambda \in \mathscr{K}$.*

Теорема 2. *Пусть замыкание $\mathscr{L}$ имеет топологическое дополнение в X ([6]), $V_{\mathscr{L}} = \{x \mid x \in \mathscr{L}, \|x\| \leqslant 1\}$. Для того чтобы линейный оператор $T\colon \mathscr{L} \to M(S, \mu, P)$ был C-оператором с измеримым ядром φ^*, удовлетворяющим условию $\|\varphi^*(\cdot)\| \in \mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) оператор T имел мажоранту $\Lambda \in \mathscr{K}$; 2) множество $TV_{\mathscr{L}}$ было относительно компактным множеством в смысле сходимости μ-почти всюду.*

Определение 4. Счетное множество $\{e_n, n \in I\}$ назовем **μ-разбиением множества** S, если для всех $n \in I$ $\mu e_n < \infty$, $e_n \cap e_m = \varnothing$, $m \neq n$, $n \in I$ и $\mu(S \setminus \bigcup_{h \in I} e_n) = 0$.

Теорема 3. *Для того чтобы линейный оператор $T\colon X^* \to M(S, \mu, P)$ был C^*-оператором с измеримым ядром φ, удовлетворяющим условию $\|\varphi(\cdot)\| \in \mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) оператор T был C-оператором с мажорантой $\Lambda \in \mathscr{K}$; 2) существовало μ-разбиение $\{e_n, n \in I\}$ множества S такое, что для каждого $n \in I$ и каждой обобщенной ограниченной последовательности $\{x_\alpha^*\}$, слабо * сходящейся к 0 (т. е. $\lim_\alpha x_\alpha^* x = 0$ для всех $x \in X$) имело место равенство*

$$\lim_\alpha \int_e (T x_\alpha^*)(s)\, d\mu(s) = 0 \text{ для всех } e \in \Sigma_n \equiv \{e \mid e \in \Sigma, e \subseteq e_n\}.$$

Теорема 4. *Пусть X — сепарабельное пространство. Для того чтобы линейный оператор $T\colon X^* \to M(S, \mu, P)$ был C^*-оператором с измеримым ядром φ, удовлетворяющим условию $\|\varphi\|(\cdot) \in \mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) T имел мажоранту $\Lambda \in \mathscr{K}$; 2) для любой слабо * сходящейся к 0 последовательности $\{x_n^*\}$ (т. е. $\lim_{n\to\infty} x_n^* x = 0$ для всех $x \in X$) имело место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} (T x_n^*)(s) = 0 \text{ для } \mu\text{-п.в. } s \in S.$$

3°. Определение 5. Пусть (S_0, Σ_0, μ_0) — пространство с σ-конечной положительной мерой, $F(S_0, \mu_0, R)$ — вещественное функциональное банахово пространство ([7]).

а) Будем писать $F(S_0, \mu_0, R) \xrightarrow{\sigma} L_1(S_0, \mu_0, R)$, если существует μ_0-разбиение $\{e_n, n \in I\}$ множества S_0 такое, что для всех $n \in I$ и $f \in F(S_0, \mu_0, R)$

$$\|f\chi_{e_n}\|_{L_1(S_0, \mu_0, R)} \leqslant c_n \|f\|_{F(S_0, \mu_0, R)},$$

где c_n не зависят от f.

б) $F = F(S_0, \mu_0, R)$ **обладает свойством Лебега** ([7]), если из $g_n \in F$, $|g_n| \leqslant |f|$, $f \in F$, $g_n(S) \to g(S)$ для μ-п.в. $s \in S$ следует, что $\|g_n - g\|_F \to 0$.

в) Через P_0 обозначим совокупность всех μ_0-простых μ_0-интегрируемых функций (([4]), стр. 120).

Определение 6. Будем говорить, что функциональное банахово пространство $F = F(S_0, \mu_0, R)$ **обладает свойством** (A), если:

1) существует функциональное банахово пространство $H_* = H_*(S_0, \mu_0, R)$ и изометрия $J\colon F^* \to H_*$, такая, что $JF^* = H_*$ и для всех $f^* \in F^*$ и $f \in F$

$$f^*(f) = \int_{X_0} (Jf^*)(t)\, f(t)\, d\mu_0(t);$$

2) $H_*(S_0, \mu_0, R) \xrightarrow{\sigma} L_1(S_0, \mu_0, R)$;

3) H_* обладает свойством Лебега.

Теорема 5. *Пусть $F(S_0, \mu_0, R)$ обладает свойством (A), $\mathscr{L} \subset F(S_0, \mu_0, R)$ — линейное многообразие и пусть замыкание $\mathscr{L}$ имеет топологическое дополнение. Для того чтобы линейный оператор $T\colon \mathscr{L} \to M(S, \mu, R)$ был интегральным оператором с ядром $K \in M(S \times S_0, \mu \times \mu_0, R)$, удовлетворяющим условию $\|K(\cdot, \cdot)\|_{H_*(S_0, \mu_0, R)} \in \mathscr{K}$, необходимо и дстаточно, чтобы оператор T был C-оператором с мажорантой $\Lambda \in \mathscr{K}$.*

Определение 7. Будем говорить, что функциональное банахово пространство F **обладает свойством** (B), если:

I) выполняется условие (1) определения 6;

II) $F = F(S_0, \mu_0, R) \xrightarrow{\sigma} L_1(S_0, \mu_0, R)$;

III) $F(S_0, \mu_0, R)$ обладает свойством Лебега.

Теорема 6. *Пусть $F = F(S_0, \mu_0, R)$ обладает свойством (B). Для того чтобы линейный оператор T: $H_*(S_0, \mu_0, R) \to M(S, \mu, R)$ был интегральным оператором с ядром $K \in M(S \times S_0, \mu \times \mu_0, R)$, удовлетворяющим условию $\|K(\cdot, \cdot)\|_{F(S_0, \mu_0, R)} \in \mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы оператор TJ: $F^* \to M(S, \mu, R)$ было C^*-оператором с мажорантой $\Lambda \in \mathscr{K}$.*

Теорема 7. *Пусть 1) $G \subset M(S_0, \mu_0, R)$ — регулярное K-пространство; 2) $F(S_0, \mu_0, R)$ обладает свойством (A); 3) $\mathscr{L} = F(S_0, \mu_0, R) \cap G$ и замыкание $\mathscr{L}$ имеет топологическое дополнение в $F(S_0, \mu_0, R)$; 4) $P_0 \subset F(S_0, \mu_0, R)$. Для того чтобы линейный оператор T: $G \to M(S, \mu, R)$ был интегральным оператором с ядром $K \in M(S \times S_0, \mu \times \mu_0, R)$, удовлетворяющим условию $\|K(\cdot, \cdot)\|_{H_*(S_0, \mu_0, R)} \in \mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы 1) оператор T был регулярным; 2) оператор, являющийся сужением оператора T на $\mathscr{L}$, был C-оператором с мажорантой $\Lambda \in \mathscr{K}$.*

Теорема 8. *Пусть 1) $G \subset M(S_0, \mu_0, R)$ — регулярное K-пространство; 2) $F = F(S_0, \mu_0, R)$ обладает свойством (B); 3) $G \supset H_*(S_0, \mu_0, R) \supset P_0$. Для того чтобы линейный оператор T: $G \to M(S, \mu, R)$ был интегральным оператором с ядром $K \in M(S \times S_0, \mu \times \mu_0, R)$, удовлетворяющим условию $\|K(\cdot, \cdot)\|_{F(S_0, \mu_0, R)} \in \mathscr{K}$, необходимо и достаточно, чтобы 1) оператор был регулярным; оператор TJ: $F^* \to M(S, \mu, R)$ был C^*-оператором с мажорантой $\Lambda \in \mathscr{K}$.*

Приведем два предложения, непосредственно следующих из теоремы 1 и теоремы 7.

Теорема 9. *Пусть T: $L_a(S_0, \mu_0, R) \to M(S, \mu, R)$ — линейный оператор, $1 \leqslant a < \infty$. Оператор T является интегральным оператором с ядром $K \in M(S \times S_0, \mu \times \mu_0, R)$, удовлетворяющим условию*

$$\int\limits_{X_0} |K(s, t)|^b \, d\mu_0(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } s \in S \qquad (1 < b < \infty),$$

тогда и только тогда, когда 1) оператор T является регулярным; 2) существует $\Lambda \in M(S, \mu, R)$ такое, что для всех $f \in L_a(S_0, \mu_0, R) \cap L_{b'}(S_0, \mu_0, R)$

$$|Tf| \leqslant \Lambda \|f\|_{L_{b'}(S_0, \mu_0, R)}, \qquad \frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = 1. \tag{4}$$

Теорема 10. *Для того чтобы оператор теоремы 9 был интегральным оператором с ядром $K \in M(S \times S_0, \mu \times \mu_0, R)$, удовлетворяющим условию*

$$\int\limits_{X} \Big(\int\limits_{X_0} |K(s, t)|^b \, d\mu_0(t) \Big)^{c/b} d\mu(s) < \infty, \quad 1 < b < \infty, \quad 1 \leqslant c \leqslant \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор T был регулярным и выполнялось неравенство (4) предыдущей теоремы с $\Lambda \in L_c(S_0, \mu_0, R)$.

Отметим, что не плотно определенные линейные операторы, действующие из функционального пространства в метрическое пространство измеримых функций, изучались Ю. И. Грибановым. В работе ([8]) им был получен критерий представимости линейного оператора в интегральной форме с ядром $K(s, t)$, измеримым по t при п.в. s.

Отметим также, что фигурирующее в теоремах 7—10 условие регулярности оператора рассматривалось в ([9], [10]) и в несколько иной форме в ([8]).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
31 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Kantorovitch, B. Vulich, Comp. Math., 5, 119 (1938). [2] И. М. Гельфанд, Матем. сборн., 4, 235 (1938). [3] N. Dunford, B. Pettis, Trans. Am. Math. Soc., 47, 323 (1940). [4] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1962. [5] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. [6] Р. Эдвардс, Функциональный анализ. Теория и приложения, М., 1969. [7] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, Proc. Ned. Acad. Wet., № 2—3 (1963). [8] Ю. И. Грибанов, Изв. высш. учебн. завед., матем., 8, 48 (1970). [9] В. Б. Коротков, О некоторых классах интегральных операторов в пространствах L_p. В сборн. Материалы VIII межвузовской математической научной конфер. Дальнего востока, Хабаровск, 1970, стр. 93. [10] В. Б. Коротков, ДАН, 195, № 6 (1970).