Доклады Академии наук СССР
1970. Том 191, № 6

УДК 513.821.838

МАТЕМАТИКА

Е. С. ТИХОМИРОВА

СПЕКТР РАВНОМЕРНЫХ ГОМОЛОГИЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 5 IX 1969)

В работе ([4]) построены группы равномерных гомологий. Эти группы не позволяют, однако, различать уже такие неэквиморфные многообразия, как $w = u^2 + v^2$ и $w = u^4 + v^4$ в E^3. Заметим, что между этими многообразиями имеется следующее различие. В первом из них возьмем цикл Z с носителем $w = c$ и ограниченную им цепь X с носителем $|X|$ минимального диаметра. Легко видеть, что $d(X)$ как функция от $d(Z)$ ($d(X)$ — диаметр множества $|X|$) имеет порядок роста, равный порядку роста функции $\varphi(t) = t^2$. Аналогичная конструкция для второго многообразия дает порядок роста функции $\varphi(t) = t^4$.

В настоящей работе строятся группы, выявляющие указанную разницу в порядках роста. Каждому порядку роста ставится в соответствие группа равномерных гомологий метрического пространства, причем относительно естественного направления в множестве порядков роста эти группы образуют обратный спектр. В частности, для функции того же порядка, что и $\varphi(t) = t$, на многообразиях с равномерной метрикой получаем ранее построенные ([4]) группы Q_r.

1. Нам понадобятся следующие определения.

А. Риманово многообразие R^n называется многообразием с равномерной метрикой ([4]), если найдутся такие $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, что для любой точки $x \in R^n$ существует отображение f некоторой окрестности U_x этой точки на эвклидов n-мерный шар единичного радиуса, удовлетворяющее условию

$$\gamma_1 \leqslant \rho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) \,/\, \rho(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) \leqslant \gamma_2, \tag{1}$$

где $\bar{x}$ и $\bar{\bar{x}}$ — любые точки из U_x.

В. Понятие порядка роста функции мы будем использовать только для непрерывных возрастающих функций, удовлетворяющих условию $\varphi(t) \geqslant t > 0$. Соответствующее определение дается для этого случая в форме, удобной для наших целей: порядок роста функции $\varphi(t)$ не меньше порядка роста функции $\psi(t)$, если найдется такая константа $\alpha > 0$, что $\varphi(t) \geqslant \alpha\psi(\alpha t)$. Порядок роста функции $\varphi(t)$ обозначается через $[\varphi]$. Если $[\varphi] \geqslant [\psi]$ и $[\psi] \geqslant [\varphi]$, то $[\varphi] = [\psi]$.

2. Пусть R — метрическое пространство, а функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в 1.В. Для каждого $\beta > 0$ построим в R множество ${}_\varphi P_\beta(R)$. По определению, $x \in {}_\varphi P_\beta$, если найдется такой сингулярный цикл Z, гомологичный нулю в R, что $x \in |Z|$ и для любой цепи X, $\partial X = Z$, имеем

$$d(X) > \beta\varphi d(Z). \tag{2}$$

(Грубо говоря, требуется, чтобы диаметр цепи относительно диаметра цикла имел порядок не ниже порядка роста функции $\varphi(t)$; условие $\varphi(t) \geqslant t$ — естественное следствие того, что $d(X) \geqslant d(Z)$.) Ясно, что если $\beta_1 < \beta_2$, то $\beta_2\varphi(\beta_2 d(Z)) > \beta_1\varphi(\beta_1 d(Z))$, т. е.

$${}_\varphi P_{\beta_2} \subset {}_\varphi P_{\beta_1}. \tag{3}$$

Обозначим через $H_r({}_\varphi P_\beta)$ ядро естественного гомоморфизма r-мерной группы сингулярных гомологий множества ${}_\varphi P_\beta$ в r-мерную группу сингулярных гомологий пространства R. В силу (3) для $\beta_1 < \beta_2$ имеется естественный гомоморфизм $h = h_{\beta_2\beta_1}$: $H_r({}_\varphi P_{\beta_2}) \to H_r({}_\varphi P_{\beta_1})$, и для $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$ имеем $h_{\beta_2\beta_1} h_{\beta_3\beta_2} = h_{\beta_3\beta_2}$, т. е. система групп $H_r({}_\varphi P_\beta)$ и гомоморфизмов h образует обратный спектр $\{H_r({}_\varphi P_\beta), h\}$. Предельную группу этого спектра обозначим через ${}_\varphi Q_r(R)$.

Теорема 1. *Если* $[\varphi] \geqslant [\psi]$, *то существует канонический гомоморфизм группы* ${}_\varphi Q_r(R)$ *в группу* ${}_\psi Q_r(R)$.

Пусть $x \in {}_\varphi P_\beta$; тогда найдется цикл Z из определения множества ${}_\varphi P_\beta$ такой, что для любой цепи X, $\partial X = Z$, будем иметь $d(X) > \beta\varphi(\beta d(Z))$. Так как $[\varphi] \geqslant [\psi]$, то найдется такое $\alpha > 0$, что $\varphi(t) \geqslant \alpha\psi(\alpha t)$. Отсюда $d(X) > \beta\varphi(\beta d(Z)) \geqslant \alpha\beta\psi(\alpha\beta d(Z))$, т. е.

$$ {}_\varphi P_\beta \subset {}_\psi P_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Тождественное отображение $R \to R$ порождает в силу (4) естественные гомоморфизмы f_β: $H_r({}_\varphi P_\beta) \to H_r({}_\psi P_{\alpha\beta})$, которые вместе с гомоморфизмами h образуют коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_r({}_\varphi P_{\beta_2}) & \xrightarrow{h} & H_r({}_\varphi P_{\beta_1}) \\ {\scriptstyle f_{\beta_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{\beta_1}} \\ H_r({}_\psi P_{\alpha\beta_2}) & \xrightarrow{h} & H_r({}_\psi P_{\beta_1}) \end{array}$$

Поэтому систему гомоморфизмов f_β можно рассматривать как гомоморфизм спектра $\{H_r({}_\varphi P_\beta), h\}$ в спектр $\{H_r({}_\psi P_{\alpha\beta}), h\}$. Этот гомоморфизм порождает канонический гомоморфизм $f = f_{\varphi\psi}$ предельных групп данных спектров. Остается заметить, что предельные группы спектров $\{H_r({}_\psi P_{\alpha\beta}), h\}$ и $\{H_r({}_\psi P_\beta), h\}$ можно отождествить.

Замечание. Легко видеть, что из $[\varphi_1] \leqslant [\varphi_2] \leqslant [\varphi_3]$ следует, что $f_{\varphi_3\varphi_1} = f_{\varphi_2\varphi_1} f_{\varphi_3\varphi_2}$.

Теорема 2. *Если* $[\varphi] = [\psi]$, *то группы* ${}_\varphi Q_r(R)$ *и* ${}_\psi Q_r(R)$ *канонически изоморфны.*

В силу предыдущей теоремы имеем канонические гомоморфизмы f: ${}_\varphi Q_r(R) \to {}_\psi Q_r(R)$ и g: ${}_\psi Q_r(R) \to {}_\varphi Q_r(R)$. Остается проверить, что gf и fg — тождественные отображения. Достаточно сделать это для gf. Отображение gf получается из гомоморфизма обратного спектра $\{H_r({}_\varphi P_\beta), h\}$ в спектр $\{H_r({}_\varphi P_{m\beta}), h\}$ (m — некоторая константа, не зависящая от β), порожденного вложениями ${}_\varphi P_\beta \to {}_\psi P_{\alpha\beta} \to {}_\varphi P_{m\beta}$. Этому гомоморфизму спектров соответствует тождественное отображение группы ${}_\varphi Q_r(R)$ в себя.

В силу теоремы 2 каждому порядку роста $[\varphi]$ соответствует группа, которую мы обозначим через ${}_{[\varphi]}Q_r(R)$. Легко видеть, что в теореме 1 можно вместо групп ${}_\varphi Q_r(R)$ и ${}_\psi Q_r(R)$ говорить о группах ${}_{[\varphi]}Q_r(R)$ и ${}_{[\psi]}Q_r(R)$ соответственно. Система групп ${}_{[\varphi]}Q_r(R)$ вместе с гомоморфизмами $f_{\varphi\psi}$: ${}_{[\varphi]}Q_r(R) \to {}_{[\psi]}Q_r(R)$ образует относительно естественного направления в множестве порядков роста обратный спектр $\{{}_{[\varphi]}Q_r(R), f\}$. Назовем его спектром равномерных гомологий.

Пример 1. Рассмотрим поверхности Γ_1 и Γ_2, заданные соответственно уравнениями $z = x^2 + y^2$ и $z = x^4 + y^4$ в эвклидовом пространстве E^3, и функции $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^2$, $\varphi_3(t) = t^4$. Можно доказать, что для Γ_1 группа ${}_{[\varphi_1]}Q_1$ — свободная циклическая, ${}_{[\varphi_2]}Q_1$, ${}_{[\varphi_3]}Q_1$ тривиальны, а для Γ_2 группы ${}_{[\varphi_1]}Q_1$, ${}_{[\varphi_2]}Q_1$ — свободные циклические, а ${}_{[\varphi_3]}Q_1$ тривиальна.

Теорема 3. *Эквиморфизм* g: $R \to R'$ *пространств с равномерной метрикой порождает изоморфизм* g: ${}_{[\varphi]}Q_r(R) \to {}_{[\varphi]}Q_r(R')$.

Легко видеть (ср. (4)), что если R — пространство с равномерной метрикой, то существует такое $q > 0$, что для $\beta > q$ можно при построении множеств ${}_\varphi P_\beta$ ограничиться рассмотрением лишь тех циклов, для которых $d(Z) \geqslant \gamma_2$ (обозначения см. в 1.А). Заметим, что γ_1 и γ_2 можно взять общие для обоих многообразий. Так как g — эквиморфизм, то из $\rho(x, y) \geqslant \gamma_2$; $x, y \in R$ следует, что $\rho(g(x), g(y)) \geqslant l$, где l — константа, не зависящая от выбора точек $x, y \in R$. Через c обозначим наименьшее из чисел γ_2 и l. Тогда ([2]) существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что

$$C_1 \leqslant \rho(x, y) \,/\, \rho(g(x), g(y)) \leqslant C_2 \tag{5}$$

как только $\rho(x, y) > c$ или $\rho(g(x), g(y)) > C$. Пусть теперь $x \in {}_\varphi P_\beta(R)$, $\beta > q$. Это значит, что найдется такой цикл Z, $x \in |Z|$, $d(Z) \geqslant \gamma_2$, что для любой цепи X, $\partial X = Z$, имеет место неравенство (2). Обозначим через Z' и X' образы цикла Z и цепи X соответственно при отображении g. Тогда, как легко получить, $C_1 \leqslant d(Z) \,/\, d(Z') \leqslant C_2$ и $C_1 \leqslant d(X) \,/\, d(X') \leqslant \leqslant C_2$, отсюда

$$d(X') \geqslant \frac{1}{C_2}\, d(X) \geqslant \frac{1}{C_2}\, \beta\varphi(\beta d(Z)) \geqslant \frac{1}{C_2}\, \beta\varphi(\beta C_1 d(Z')) \geqslant a\beta\varphi(a\beta d(Z')),\ a = \min\left(C_1, \frac{1}{C_2}\right).$$

Итак, $g(x) \in {}_\varphi P'$, т. е.

$$g({}_\varphi P_\beta) \subset {}_\varphi P'_{a\beta} \tag{6}$$

(здесь ${}_\varphi P_{a\beta}' = {}_\varphi P_{a\beta}(R')$). Аналогично доказывается существование такой константы b, что для $\beta > q$ будем иметь

$$g^{-1}({}_\varphi P_\beta') \subset {}_\varphi P_{b\beta}. \tag{7}$$

Используя включения (6) и (7), рассуждениями, аналогичными приведенным в доказательствах теорем 1 и 2, получаем, что отображение g порождает канонический изоморфизм.

З а м е ч а н и е. В случае геодезических пространств группы ${}_{[\varphi]}Q_r$ являются инвариантами сильных гомеоморфизмов.

П р и м е р 2. Возвращаясь к поверхностям Γ_1 и Γ_2, рассмотренным в примере 1, мы получаем, в силу теоремы 3, что они не эквиморфны, хотя группы $Q_r = {}_{\varphi_1}Q_r$ (см. ([4])) для них изоморфны. Заметим, однако, что неэквиморфность этих поверхностей может быть установлена и путем сравнения их объемных инвариантов ([1]). Для неэквиморфных многообразий, рассмотренных в следующем примере, и объемные инварианты одинаковы, и группы Q_r изоморфны.

П р и м е р 3. Рассмотрим многообразия Π_1 и Π_2, заданные в эвклидовом пространстве E^4 уравнениями $u = x^2 + y^2 - z^2$ и $x^4 + y^4 - z^2$ соответственно. Пусть $\psi(t) = t^2$. Можно доказать, что ${}_{[\psi]}Q_1(\Pi_2)$ — свободная циклическая, а ${}_{[\psi]}Q_1(\Pi_1)$ тривиальна. Отсюда следует, что Π_1 и Π_2 не эквиморфны.

Усилением теоремы 3 является

Т е о р е м а 4. *Эквиморфизм g: $R \to R'$ пространств с равномерной метрикой порождает изоморфизм спектров* $\hat{g}$: $\{{}_{[\varphi]}Q_r(R), f\} \to \{{}_{[\varphi]}Q_r(R'), f\}$.

Утверждение теоремы следует из теоремы 3 и коммутативности диаграмм

$$\begin{array}{ccc} {}_{[\varphi]}Q_r(R) & \to & {}_{[\psi]}Q_r(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_{[\varphi]}Q_r(R') & \to & {}_{[\psi]}Q_r(R') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} {}_{[\varphi]}Q_r(R') & \to & {}_{[\psi]}Q_r(R') \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_{[\varphi]}Q_r(R) & \to & {}_{[\psi]}Q_r(R) \end{array}$$

Пользуюсь случаем поблагодарить В. А. Ефремовича и особенно В. Ю. Сандберга за ценные указания и внимание.

Воронежский государственный
университет

Поступило
4 IX 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Е ф р е м о в и ч, УМН, 8, 5 (1953). [2] В. А. Е ф р е м о в и ч, УМН, 4, 3 (1949). [3] В. Г у р е в и ч, Г. В о л м э н, Теория размерности, ИЛ, 1948. [4] Е. С. Т и х о м и р о в а, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, № 6, 865 (1962).