Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

И. Ю. БРАИЛОВСКАЯ

ТЕЧЕНИЕ В БЛИЖНЕМ СЛЕДЕ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 4 VIII 1970)

1. Постановка задачи. В работе рассматривается плоское течение в следе за телом с прямоугольной формой данного среза. Тело движется в сверхзвуковом потоке.

В области Q (рис. 1) ищется численное решение уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого газа. Линия ABC — граница тела, CD — ось симметрии. На прямой AF известен набегающий поток, т. е. значения скорости, плотности и температуры параметров пограничного слоя на плоской пластине, на которую набегает равномерный сверхзвуковой поток на бесконечности.

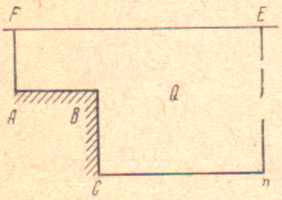

Рис. 1

На линии FE и выше поток полагается невязким и безвихревым. В точках FE удовлетворяется уравнение

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0, \qquad (1)$$

$\mathbf{V}$ — скорость; кроме того, все параметры потока выражаются через число Маха по формулам, описывающим простую волну. Эти формулы вместе с уравнением (1) являются граничными условиями на FE [1].

На линии ED и справа от нее выполняются уравнения типа пограничного слоя, которые являются граничными условиями на ED [1]. Такое задание граничных условий вниз по потоку позволяет ставить границу ED сразу за задней критической точкой, т. е. за точкой на оси, где поток тормозится и разделяется на возвратное течение в данной области и дальнейшую часть следа. Полную систему Навье — Стокса требуется решать только в сравнительно небольшой области ближнего следа там, где есть возвратное течение.

На границе ABC задаются условия прилипания для скорости и температуры стенки. Плотность во всех точках на ABC находится из уравнения неразрывности [2].

Уравнения Навье — Стокса, которые решаются в Q, состоят из двух уравнений движения, уравнения энергии и неразрывности. Давление, плотность и температура связаны уравнением состояния. Коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры по степенному закону.

2. Разностная схема. Краевая задача для системы уравнений Навье — Стокса в области Q с описанными граничными условиями на $ABCDEF$ решалась численно, методом конечных разностей. Были использованы нестационарные уравнения, решение краевой задачи получалось в результате установления. Начальные данные взяты произвольно, их вид не влиял на установившееся решение. Система координат — декартова. Пространственные производные аппроксимировались обычными симметричными разностями. Известно, что симметричная аппроксимация первых производных по пространству приводит при малой вязкости к появлению ошибок вида $(-1)^k f(x, y, t)$, где k — номер узла сетки. Это связано с плохой аппроксимацией функций погранслойного типа при достаточно крупном шаге сетки. Для уменьшения ошибки такого рода вводили сглажива-

Таблица 1

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	0,926	1,45	2	1,528	0,708	0,823	0,969	1,464	2
y_0	—0,326	—0,222	—0,143	—0,188	—0,364	—0,324	—0,285	—0,196	—0,180
P_0	0,318	0,333	0,346	0,327	0,243	0,197	0,207	0,235	0,262

ние: в уравнение неразрывности была добавлена фиктивная вязкость порядка $O(h^2)$, т. е. вместо обычного, решалось уравнение неразрывности

$$\partial\rho / \partial t = -\partial\rho u / \partial x - \partial\rho v / \partial y + k_1 |u| \Delta x^2 \partial^2 \rho / \partial x^2 + k_2 |v| \Delta y^2 \partial^2 \rho / \partial y^2,$$

k_1 и k_2 — некоторые константы, в частности, $k_1 = k_2 = 1$.

Полученные разностные уравнения решали явной схемой с пересчетом ([2]). Погрешность аппроксимации схемы на установившемся решении есть величина $O(h^2)$. Условие устойчивости схемы

$$\Delta t \leqslant \min\left(\frac{h^2 R\rho}{8}, \frac{h}{|u| + |v| + c\sqrt{2}}\right),$$

где Δt — шаг по времени, $h = \min(\Delta x, \Delta y)$, Δx, Δy — шаги по пространству. В последних расчетах для ускорения установления применялась некоторая модификация схемы, предложенной в работе ([2]), так, чтобы шаг по времени не зависел от коэффициента $(1/R\rho)$ при диссипативных членах уравнений. Схема тогда была устойчива при $\Delta t \leqslant h / (|u| + |v| + c\sqrt{2})$.

3. Полученные результаты. Во всех проведенных расчетах на стенке задавалась температура $T_w = T_\infty$, уравнение состояния и вид зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры были одинаковы, варианты решения отличались только числами Маха (M_∞), Рейнольдса (Re) и отношением толщины набегающего погранслоя к высоте BC (δ / H). Числа M_∞ и Re отнесены к параметрам набегающего потока на бесконечности, за характерную длину принята высота BC. Решались следующие варианты:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9
M_∞	2	2	2	2	3	5	5	5	5
Re	100	200	500	200	186	745	932	1863	3727
δ/H	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1

Шаг в поперечном направлении в окрестности и ниже линии AB $\Delta y = 0{,}08$ (длина BC равна единице), выше AB шаг увеличивался, шаг в продольном направлении $\Delta x = 0{,}1$. Для контроля точности расчетов следили за выполнением законов сохранения, т. е. равенством нулю потоков массы импульса и энергии через любой замкнутый контур для установившегося решения. При подсчете потоков импульса и энергии учитывались вязкость и теплопроводность. Ошибка не превышала 1% от потока, втекающего в данный контур.

На рис. 2 приводятся характерные графики линий тока. Правая граница ED находится вниз по потоку от задней критической точки, но выше, чем точка пересечения звуковой линии ($M = 1$) с осью CD. Точка отрыва находится на вертикальной стенке BC, ниже угловой точки B.

На рис. 3 приводятся характерные профили давления для вариантов 1, 7, 8. Везде на графиках и в таблице давление отнесено к его значению на бесконечности. Кроме обычного уменьшения давления вдоль по y сверху вниз, вследствие разворота потока, в ближайшей окрестности под угловой точкой происходит переразрежение, затем давление быстро возрастает до величины донного. Величина переразрежения уменьшается с ростом числа Re и с уменьшением числа M_∞. Давление в самой угловой точке B почти равно донному. Переразрежение быстро исчезает вниз по потоку от BC. Давление поперек зоны возвратного течения постоянно. Вниз по потоку от BC возникает волна сжатия, давление $P(y)$ после веера волн разрежения быстро возрастает и затем остается постоянным до оси CD. Эта волна сжатия более четко выражена при больших числах M_∞ и Re.

В табл. 1 приводятся для различных вариантов координаты задней критической точки (x_0) и точки отрыва (y_0). За единицу длины везде принята высота BC, начало координат находится в точке B. В этой же таблице приводятся значения давления P_0 в точке C (донное давление). Видно, что размеры области возвратного течения увеличиваются почти прямо пропорционально числу Re и уменьшаются с увеличением числа M_∞. Величина P_0 при постоянных числе Re и отношении δ / H сильно уменьшается с ростом числа M_∞. Когда описанные здесь расчеты были закончены, автору стала известна работа [3], в которой решается аналогичная задача. Качественные результаты расчетов данной работы и [3] совпадают. Диапазон чисел M_∞ и Re в нашей работе шире, чем в [3].

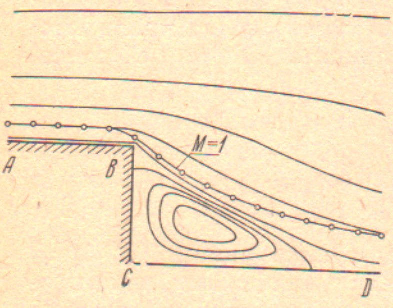

Рис. 2

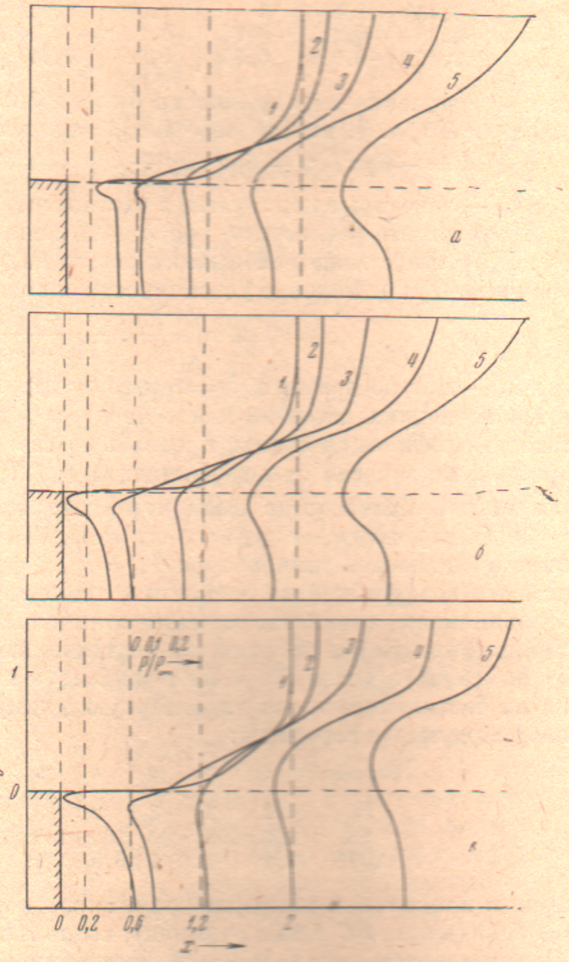

Рис. 3

Рис. 2. Линии тока при $M_\infty = 5$, Re = 1863

Рис. 3. Профили давления $P(y)$ при $x = 0$ (*1*); 0,2 (*2*); 0,6 (*3*); 1,2 (*4*); 2 (*5*); *а* — $M_\infty = 5$, Re = 1863; *б* — $M_\infty = 5$, Re = 932; *в* — $M_\infty = 2$, Re = 100

Кроме того, в отличие от [3], здесь используются другие условия для плотности на стенке BC и для всех функций на границах FE, ED. Благодаря введению искусственной вязкости в уравнение неразрывности, не требуется специальных способов расчета на линии, ближайшей к BC.

Особенно отметим, что уравнения типа погранслоя в качестве граничных условий на ED позволяют сильно сократить область, в которой решается полная система Навье — Стокса. Дальнейшая часть следа может быть получена как решение стационарных уравнений типа погранслоя методами, применяющимися для решения уравнений пограничного слоя.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ю. Браиловская, Мех. жидкости и газа, № 3 (1967). [2] И. Ю. Браиловская, ДАН, 160, № 5 (1965). [3] J. S. Allen, S. I. Cheng, Physic of Fluid, № 1, 37 (1970).