Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 3

УДК 539.374.1 МЕХАНИКА

С. З. БРУК

# ОБОБЩЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛЭМБА В ВЯЗКО-УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

*(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 23 I 1970)*

Для линейной изотропной вязко-упругой среды задача Лэмба и близкие ей динамические задачи изучались в [1-6]. В [1, 2] рассматривается задача Лэмба для среды с диссипацией, полученное решение исследуется применительно к одному частному случаю вязкости; в [3, 4] рассматривается задача о распространении волн Рэлея с затуханием для сред со «слабой» вязкостью; в [5] решена контактная задача для частного случая вязко-упругой среды; в [6] решены различные вязко-упругие задачи, однако без исследования динамических свойств полученных решений.

Здесь излагается содержание нашей работы, посвященной задаче Лэмба для линейной изотропной среды с больцмановским соотношением напряжение — деформация общего вида:

$$\sigma_{xx} = P(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) + 2Q\,\partial u/\partial x,$$
$$\sigma_{yy} = P(\partial u/\partial x + \partial v/\partial y) + 2Q\,\partial v/\partial y,$$
$$\sigma_{xy} = Q(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x), \tag{1}$$

где

$$P\zeta = \lambda\zeta - \int_{-\infty}^{t} \varphi(t-T)\,\zeta(T)\,dT, \quad Q\zeta = \mu\zeta - \int_{-\infty}^{t} \psi(t-T)\,\zeta(T)\,dT,$$

$$\varphi(s) = \int_{0}^{+\infty} a(\tau)\,e^{-s/\tau}d\tau, \quad \psi(s) = \int_{0}^{+\infty} b(\tau)\,e^{-s/\tau}d\tau, \quad a(\tau) > 0,\ b(\tau) > 0.$$

Задача состоит в отыскании и исследовании решения $(u, v)$ системы Коши

$$\partial\sigma_{xx}/\partial x + \partial\sigma_{xy}/\partial y = \rho\ddot{u}, \quad \partial\sigma_{xy}/\partial x + \partial\sigma_{yy}/\partial y = \rho\ddot{v}, \tag{2}$$

удовлетворяющего условиям

$$(u;\ v) = 0, \quad t < 0; \tag{3}$$
$$\sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = \delta(x)\delta(t), \quad y = 0. \tag{4}$$

Предложение 1. *Существует, притом единственное, решение $(u; v)$ задачи (1) — (4) в классе обобщенных функций. Его можно представить в виде*

$$u = \frac{\pm i}{8\pi^2\rho} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon\gamma} p_2^2 d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha^2 - {}^1/{}_2 p_2^2)\,\alpha e^{i\gamma\beta_1 y} + \alpha\beta_1\beta_2 e^{i\gamma\beta_2 y}}{\alpha^2\beta_1\beta_2 + (\alpha^2 - {}^1/{}_2 p_2^2)^2} e^{i\gamma(\alpha x - t)} d\alpha, \quad \gamma \gtrless 0; \tag{5}$$

$$v = \frac{\pm i}{8\pi^2\rho} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon\gamma} p_2^2 d\gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\alpha^2 - {}^1/{}_2 p_2^2)\,\beta_1 e^{i\gamma\beta_1 y} + \alpha^2\beta_1 e^{i\gamma\beta_2 y}}{\alpha^2\beta_1\beta_2 + (\alpha^2 - {}^1/{}_2 p_2^2)^2} e^{i\gamma(\alpha x - t)} d\alpha, \quad \gamma \gtrless 0;$$

$$\beta_k = \sqrt{-\alpha^2 + p_k^2}; \quad \operatorname{Re} i\gamma\beta_k < 0; \quad p_1^2 = \rho/(\lambda + 2\mu - [\tilde{\varphi}(\gamma) + 2\tilde{\psi}(\gamma)]),$$

$$p_2^2 = \rho/[\mu - \tilde{\varphi}(\gamma)]; \quad \tilde{z}(\gamma) = \int_{0}^{+\infty} z(t)\,e^{i\gamma t}dt.$$

Доказывается обычным путем.

П р е д л о ж е н и е 2. *Решение* $(u;\ v)$ *можно представить в виде суммы волн трех видов*

$$(u, v) = (u; v)^{(1)} + (u; v)^{(2)} + (u; v)^{(R)},$$

*аналогичных волнам продольной, поперечной и Рэлея в упругой среде.*

Доказывается переходом в комплексную плоскость $\alpha$ во внутренних интегралах ([5]), (ср. ([2, 7])).

Следующие два предложения доказываются методом стационарной фазы

П р е д л о ж е н и е 3. *Линии разрыва производных* $(u;\ v)^{(1)}$, $(u;\ v)^{(2)}$ *и* $(u;\ v)^{(R)}$ *(начиная с некоторого порядка) асимптотически совпадают с линиями*

$$\sqrt{\rho r^2/(\lambda+2\mu)} - t = 0, \quad \sqrt{\rho r^2/\mu} - t = 0, \quad \sqrt{\rho r^2/\mu\omega} - t = 0$$

*соответственно где* $\omega$ — *корень уравнения*

$$\omega^3 - 8\omega^2 + 8(3 - 2p_1^2/p_2^2)\,\omega - 16(1 - p_1^2/p_2^2) = 0,$$

*удовлетворяющий условию* $1/2 < \operatorname{Re}\omega < 1$ *и* $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

П р е д л о ж е н и е 4. *При* $r \gg 1$ *справедливы следующие асимптотические равенства:*

$$u^{(1)}_{y>0} = \frac{1}{2\pi\rho r}\operatorname{Re} i\left\{\frac{p_1p_2^2\,(p_1^2x^2 - 1/2\,p_2^2r^2)\,xy e^{i\gamma(p_1r-t)}}{p_1^3x^2y\sqrt{p_2^2r^2 - p_1^2x^2} + (p_1^2x^2 - 1/2\,p_2^2r^2)^2}\left[\frac{p_1}{\gamma(\gamma p_1)''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma^{(1)}};$$

$$v^{(1)}_{y>0} = \frac{y}{x}\,u^{(1)}_{y>0}; \quad \{(\gamma p_1)'_{\gamma}\}^{(1)}_{\gamma=\gamma'} = \frac{t}{r}; \quad \operatorname{Re}\gamma^{(1)} \geqslant 0;$$

$$u^{(2)}_{y>0} = \frac{1}{2\pi\rho r}\operatorname{Re} i\left\{\frac{p_2\sqrt{p_2^2x^2 - p_1^2r^2}\,xy^2e^{i\gamma(p_2r-t)}}{x^2y\sqrt{p_2^2x^2 - p_1^2r^2} - ip_2(x^2 - 1/2\,r^2)^2}\left[\frac{p_2}{\gamma(\gamma p_2)''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma^{(2)}};$$

$$v^{(2)}_{y>0} = \frac{x}{y}\,u^{(2)}_{y>0}; \quad \{(\gamma p_2)'_{\gamma}\}_{\gamma=\gamma^{(2)}} = \frac{t}{r}; \quad \operatorname{Re}\gamma^{(2)} \geqslant 0;$$

$$\dot u^{(1)}_{y=0} = \frac{\pm 1}{4\pi\rho x^2}\operatorname{Re} i\left\{\frac{p_1^3p_2^2\sqrt{p_2^2 - p_1^2}}{(p_1^2 - 1/2\,p_2^2)^3}e^{i\gamma(p_1|x|-t)}\left[\frac{p_1}{\gamma(\gamma p_1)''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma_0^{(1)}}, \quad x \gtrless 0;$$

$$\dot v^{(1)}_{y=0} = \frac{1}{4\pi\rho x^2}\operatorname{Re} i\left\{-\frac{p_2^2}{p_1^2 - 1/2\,p_2^2}e^{i\gamma(p_1|x|-t)}\left[\frac{p_1}{\gamma(\gamma p_1)''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma_0^{(1)}};$$

$$\dot u^{(2)}_{y=0} = \frac{\pm 1}{4\pi\rho x^2}\operatorname{Re} i\left\{\frac{-4\sqrt{p_2^2 - p_1^2}}{p_2}\,ie^{i\gamma(p_2|x|-t)}\left[\frac{p_2}{\gamma(\gamma p_2)''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma_0^{(2)}} \quad x \gtrless 0;$$

$$\dot v^{(2)}_{y=0} = \frac{1}{4\pi\rho x^2}\operatorname{Re} i\left\{\frac{-16(p_1^2 - p_2^2)}{p_2^2}e^{i\gamma(p_2|x|-t)}\left[\frac{p_2}{\gamma(\gamma p_2)''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma_0^{(2)}};$$

$$\{(\gamma p_k)'_{\gamma}\}_{\gamma=\gamma_0^{(k)}} = \frac{t}{|x|}; \quad \operatorname{Re}\gamma_0^{(k)} \geqslant 0;$$

$$u^{(R)}_{y\geqslant 0} = \frac{\pm 1}{\rho\sqrt{2\pi r}}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{F_{1k}p_2^2e^{i\gamma(p_{k+2}r-t)}}{G}\left[\frac{-1}{i(\gamma p_{k+2})''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma^{(k+2)}}, \quad x \gtrless 0.$$

$$v^{(R)}_{y\geqslant 0} = \frac{1}{\rho\sqrt{2\pi r}}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{iF_{2k}p_2^2e^{i\gamma(p_{k+2}r-t)}}{G}\left[\frac{-1}{i(\gamma p_{k+2})''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2}\right\}_{\gamma=\gamma^{(k+2)}};$$

$$p_3 = p_2\left[\sqrt{\frac{1}{\omega}}\,|\cos\widehat{xr}| + \sqrt{\frac{1}{\omega} - \frac{p_1^2}{p_2^2}}\cos\widehat{yr}\right],$$

$$p_4 = p_2\left[\sqrt{\frac{1}{\omega}}\,|\cos\widehat{xr}\,| + \sqrt{\frac{1}{\omega}-1}\cos\widehat{yr}\right];$$

$$\{(\gamma p_{k+2})'_\gamma\}_{\gamma=\gamma^{(k+2)}} = t/r; \quad \operatorname{Re}\gamma^{(k+2)} \geqslant 0 \quad (k=1,\ 2);$$

$$F_{11} = \left(\frac{1}{\omega}-{}^1\!/_2\right)\sqrt{\frac{1}{\omega}}, \quad F_{12} = -\sqrt{\frac{1}{\omega}-\frac{p_1^2}{p_2^2}}\sqrt{\frac{1}{\omega}-1}\sqrt{\frac{1}{\omega}},$$

$$F_{21} = \left(\frac{1}{\omega}-{}^1\!/_2\right)\sqrt{\frac{1}{\omega}-\frac{p_1^2}{p_2^2}}, \quad F_{22} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{1}{\omega}-\frac{p_1^2}{p_2^2}};$$

$$G = \left[-2\sqrt{\frac{1}{\omega}-\frac{p_1^2}{p_2^2}}\sqrt{\frac{1}{\omega}-1} + \frac{1}{\omega}\left(-\frac{2}{\omega}+1+\frac{p_1^2}{p_2^2}\right)\Big/\left(\sqrt{\frac{1}{\omega}-\frac{p_1^2}{p_2^2}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sqrt{\frac{1}{\omega}-1}\right) + 4\left(\frac{1}{\omega}-{}^1\!/_2\right)\right]\sqrt{\frac{1}{\omega}};$$

$$\omega^3 - 8\omega^2 + 8\,(3-2p_1^2/p_2^2)\,\omega - 16\,(1-p_1^2/p_2^2) = 0, \quad {}^1\!/_2 < \operatorname{Re}\omega < 1;$$

$$\operatorname{Re} i\gamma p_1 \leqslant 0, \quad \operatorname{Re} i\gamma p_2 \leqslant 0, \quad \operatorname{Re}\{-\gamma\sqrt{p_2^2x^2-p_1^2r^2}\} \leqslant 0,$$

$$\operatorname{Re} i\gamma\sqrt{p_2^2r^2-p_1^2x^2} \leqslant 0;$$

$$\operatorname{Im}\left[\frac{p_k}{\gamma}\frac{1}{(\gamma p_k)''_{\gamma\gamma}}\right]^{1/2} \geqslant 0 \quad (k=1,\ 2);$$

$$\operatorname{Re} i\gamma p_2\sqrt{1/\omega} \leqslant 0; \quad \operatorname{Re}\{-\gamma p_2\sqrt{1/\omega-p_1^2/p_2^2}\} \leqslant 0; \quad \operatorname{Re}\{-\gamma p_2\sqrt{1/\omega-1}\} \leqslant 0;$$

$$\operatorname{Im}\,[-1/i\,(\gamma p_{k+2})''_{\gamma\gamma}]^{1/2} \geqslant 0 \quad (k=1,\ 2).$$

*В частности, для случая* $\varphi(s) = \frac{\lambda}{\tau}e^{-s/\tau}$ *и* $\psi(s) = \frac{\mu}{\tau}e^{-s/\tau}$:

$$\dot{u}^{(1)}_{y=0} = \mp\frac{n^{3/2}\sqrt{1-n}\,e^{-t/2\tau}}{4\pi\rho\,|x|^2\,(n-{}^1\!/_2)^3}\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{k^{(1)}}}{2\tau} + \frac{t}{\sqrt{k^{(1)}}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{k^{(1)}}}{2\tau}\right), \quad x \gtrless 0;$$

$$\dot{v}^{(1)}_{y=0} = \frac{e^{-t/2\tau}}{4\pi\rho\,|x|^2\,(n-{}^1\!/_2)}\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{k^{(1)}}}{2\tau} + \frac{t}{\sqrt{k^{(1)}}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{k^{(1)}}}{2\tau}\right);$$

$$\dot{u}^{(2)}_{y=0} = 0; \quad \dot{v}^{(2)}_{y=0} = \frac{4\,(n-1)\,e^{-t/2\tau}}{\pi\rho\,|x|^2}\left(\operatorname{ch}\frac{\sqrt{k^{(2)}}}{2\tau} + \frac{t}{\sqrt{k^{(2)}}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{k^{(2)}}}{2\tau}\right);$$

$$u^{(R)}_{y=0} = \frac{\pm F_1e^{-t/2\tau}}{2\mu\sqrt{\pi\tau G}}\,\frac{\left(2t^2-\frac{\rho x^2}{\mu\omega}\right)\operatorname{ch}\frac{\sqrt{k^{(R)}}}{2\tau} - 2t\sqrt{k^{(R)}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{k^{(R)}}}{2\tau}}{\sqrt{\rho x^2/\mu\omega}\,\sqrt[4]{(k^{(R)})^3}}, \quad x \gtrless 0;$$

$$v^{(R)}_{y=0} = \frac{-F_2e^{-t/2\tau}}{2\mu\sqrt{\pi\tau G}}\,\frac{2t\sqrt{k^{(R)}}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{k^{(R)}}}{2\tau} + \left(2t^2-\frac{\rho x^2}{\mu\omega}\right)\operatorname{sh}\frac{\sqrt{k^{(R)}}}{2\tau}}{\sqrt{\rho x^2/\mu\omega}\,\sqrt[4]{(k^{(R)})^3}};$$

$$F_1 = F_{11}+F_{12}, \quad F_2 = F_{21}+F_{22}; \quad n = \mu\,/\,(\lambda+2\mu);$$

$$k^{(1)} = t^2-\rho x^2\,/\,(\lambda+2\mu), \quad k^{(2)} = t^2-\rho x^2\,/\,\mu,$$

$$k^{(R)} = t^2-\rho x^2\,/\,\mu\omega; \quad \omega = [\,(0{,}87+1{,}12\nu)\,/\,(1+\nu)\,]^2; \quad \nu = {}^1\!/_2\lambda\,/\,(\lambda+\mu).$$

Московский инженерно-строительный институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
15 I 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] N. Ricker, Bull. Seis. Soc. Am., 33, 197 (1943). [2] M. Newlands, J. Acous. Soc. Am., 26, № 3 (1954). [3] F. Pes, I. Hely, J. Appl. Phys. Am., 28, № 11 (1957). [4] И. А. Викторов, Акустич. журн., 10, № 1 (1964). [5] Л. А. Галин, А. А. Шматкова, ПММ, 32, в. 3 (1970). [6] K. Valanis, Eng. Res. Report. Am., № 48, 1966; № 51, 53, 55, 57, 59 (1967); № 65, 69 (1968). [7] Г. И. Петрашень, Г. И. Марчук, К. И. Огурцов, Уч. зап. Ленингр. унив., № 21 (1950).