Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 62.502

*КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

В. Б. ЛАРИН, К. И. НАУМЕНКО, В. Н. СУНЦЕВ

# ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ КООРДИНАТ ОБЪЕКТА ОДНИМ УПРАВЛЯЮЩИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

*(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 23 VII 1970)*

Решение задачи синтеза оптимальных линейных систем стабилизации обычно сводится к нахождению из уравнения Винера — Хопфа передаточной функции оптимального фильтра (передаточной функции замкнутой системы «объект + регулятор») с последующим определением искомых передаточных функций регулятора. Однако отсутствие в правой полуплоскости полюсов передаточной функции замкнутой системы не гарантирует ее устойчивости из-за возможного сокращения нулей и полюсов, расположенных в правой полуплоскости.

Приводим алгоритм решения, основанный на специальном выборе варьируемой функции в уравнении Винера — Хопфа, который обеспечивает устойчивость замкнутой системы.

Пусть возмущенное движение объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$P\mathbf{x} = \mathbf{m}\delta + \psi, \tag{1}$$

где $P$ — матрица $n \times n$, элементы которой $p_{ij}(p)$ — операторные полиномы от $p$ $\left(p = \frac{d}{dt}\right)$, $\mathbf{x}$ — $n$-мерный вектор фазовых координат объекта, $\mathbf{m}$ — заданный постоянный вектор, $\delta$ — управляющее воздействие, $\psi$ — вектор внешних возмущений, компоненты которого $\psi_i$ — стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей $S_\psi$.

Требуется найти закон управления

$$\delta = \mathbf{w}'\mathbf{x}\,^*, \tag{2}$$

т. е. определить передаточные функции регулятора (элементы $w_i(p)$ вектора $\mathbf{w}'$) таким образом, чтобы в установившемся режиме при устойчивой замкнутой системе «объект + регулятор» (система уравнений (1) и (2)) минимизировать квадратичный критерий

$$e = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle x_i^2 \rangle + c\langle \delta^2 \rangle + \langle \dot{\delta}^2 \rangle, \tag{3}$$

где $a_i$ и $c$ — неотрицательные весовые константы, $\langle x_i^2 \rangle$, $\langle \delta^2 \rangle$ и $\langle \dot{\delta}^2 \rangle$ — дисперсии величин $x_i$, $\delta$ и $\dot{\delta}$.

Введем варьируемый вектор

$$\mathbf{f}' = -[\Delta_p(p) - \mathbf{w}'\mathbf{n}]^{-1}(\alpha' + \mathbf{w}'\mathrm{B}). \tag{4}$$

Здесь $\Delta_p(p) = \det P$, $\mathbf{n} = \Delta_p(p)P^{-1}\mathbf{m}$, элементы вектора $\alpha'$ и матрицы $B = \mathrm{diag}\,\{\beta_1(p), \beta_2(p), \ldots, \beta_n(p)\}$ — пока произвольные полиномы от $p$.

Относительно вектора $\mathbf{f}'$ функционал (3) будет квадратичным:

$$e = \frac{1}{j}\int_{-j\infty}^{j\infty} \mathrm{Sp}\,\{DS_\psi D_*[(\mathrm{B}_* - \mathbf{f}'_*\mathbf{n}_*)A(\mathrm{B} - \mathbf{n}\mathbf{f}') + (\Delta_p^*(s)\mathbf{f}'_* + \alpha'_*)(c - s^2)(\Delta_p(s)\mathbf{f}' + \alpha')]\}\,ds^{**}, \tag{5}$$

где $D = (P\mathrm{B} + \mathbf{m}\alpha')^{-1}$, $A = \mathrm{diag}\,\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

* В отличие от векторов-столбцов векторы-строки имеют штрих.

** Индекс $_*$ означает операцию транспонирования и замену аргумента $s$ на $-s$.

Искомый вектор $\mathbf{f}'$, обращающий в нуль первую вариацию функционала (5) и имеющий полюсы только в левой полуплоскости $s$, определится соотношением

$$\mathbf{f}' = \frac{1}{g(s)} (\mathbf{k}_0' + \mathbf{k}_+') H^{-1}. \tag{6}$$

Здесь действительная и аналитическая в правой полуплоскости вместе с обратной матрица $H$ — результат факторизации ([1]) матрицы $DS_\psi D_*$, т. е.

$$DS_\psi D_* = HH_*\,*,$$

$\mathbf{k}_0'$ и $\mathbf{k}_+'$ — слагаемые разложения вектора $\frac{1}{g^*(s)} [\mathbf{n}_* AB - (c - s^2) \Delta_p^*(s) \boldsymbol{\alpha}'] H$ на полиномы от $s (\mathbf{k}_0')$ и правильные дроби, имеющие полюсы только в левой $(\mathbf{k}_+')$ и только в правой $(\mathbf{k}_-')$ полуплоскостях $s$,

$$\frac{1}{g^*(s)} [\mathbf{n}_* AB - (c - s^2) \Delta_p^*(s) \boldsymbol{\alpha}'] H = \mathbf{k}_0' + \mathbf{k}_+' + \mathbf{k}_-', \tag{7}$$

полином $g(s)$, имеющий нули только в левой полуплоскости,— результат факторизации выражения

$$\mathbf{n}_* A\mathbf{n} + (c - s^2) \Delta_p^*(s) \Delta_p(s) = g^*(s) g(s).$$

Используя произвол в выборе полиномов $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(s)$, можно существенно упростить задачу факторизации матрицы $DS_\psi D_*$. Так, соответствующим выбором полиномов $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(s)$ можно добиться того, чтобы полином

$$q(s) = \det D^{-1} = \left[\Delta_p(s) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k(s)}{\beta_k(s)} n_k(s)\right] \prod_{k=1}^{n} \beta_k(s)$$

имел нули только в левой полуплоскости, т. е. чтобы полиномиальная матрица $D^{-1}$ вместе с обратной была аналитической в правой полуплоскости**.

Таким образом, матрица $H$ запишется в виде

$$H = DU, \tag{8}$$

где аналитическая вместе с обратной в правой полуплоскости и действительная матрица $U$ определяется в результате факторизации матрицы спектральных плотностей $S_\psi = UU_*$.

Решение сформулированной задачи — искомый вектор передаточных функций оптимального регулятора — согласно (4), (6) и (8), определится соотношением

$$w' = \frac{1}{w_0(s)} \tilde{\mathbf{w}}' = \left[\frac{(c - s^2) \Delta_p(s) u(s)}{g^*(s)} + u(s) \mathbf{k}_-' U^{-1} \mathbf{m}\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[u(s) \mathbf{k}_-' U^{-1} P - \frac{u(s)}{g^*(s)} \mathbf{n}_* A\right], \tag{9}$$

где $w_0(s)$ — элементы вектора $\tilde{\mathbf{w}}'$ и $u(s)$ — полиномы от $s$ ($u(s)$ — общий знаменатель элементов матрицы $U^{-1}$).

Характеристический определитель замкнутой системы «объект + регулятор»

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} P & -\mathbf{m} \\ \tilde{\mathbf{w}}' & -w_0(s) \end{vmatrix} = -u(s) g(s)$$

имеет нули только в левой полуплоскости, так как нули полиномов $u(s)$ и $g(s)$ находятся в левой полуплоскости, т. е. замкнутая система устойчива.

---

* Дробно-рациональная матрица $DS_\psi D_*$ удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в ([1]), необходимым для ее факторизации, так как предполагается $\det S_\psi \neq 0$ и $\det D \neq 0$.

** Если нули полинома $q(s)$ расположены в левой полуплоскости $s$, то решение задачи не зависит от полиномов $\alpha_i(s)$ и $\beta_i(s)$.

Упрощение процедуры факторизации матрицы $DS_\psi D_*$ позволяет указать класс возмущений, относительно которых данный регулятор будет оптимальным. Пусть найден оптимальный регулятор для возмущений, имеющих матрицу спектральных плотностей $S_\psi(\omega) = U(j\omega)U'(-j\omega)$. Этот регулятор, согласно (9), (7) и (8), будет оптимальным и для возмущений с матрицей спектральных плотностей

$$\tilde{S}_\psi(\omega) = U(j\omega)CC'U'(-j\omega), \tag{10}$$

где $C$ — невырожденная постоянная матрица $n \times n$.

Инвариантность оптимального регулятора относительно указанного класса возмущений тесно связана с инвариантностью оптимального регулятора относительно начальных условий ([2]), поскольку рассматриваемая задача может быть сведена к задаче аналитического конструирования регуляторов.

Сформулированный алгоритм решения применим и в том случае, когда необходимые для формирования закона управления фазовые координаты измеряются с помехами, т. е. закон управления разыскивается не в виде (2), а в виде

$$\delta = \mathbf{w}'(\mathbf{x} + \varphi),$$

где $\varphi$ — вектор погрешностей измерения координат объекта, компоненты которого — помехи $\varphi_i$ — стационарные случайные процесеы с нулевым математическим ожиданием и матрицей спектральных плотностей $S_\varphi$.

Решение задачи имеет вид

$$w' = \frac{1}{w_0(s)}\tilde{\mathbf{w}}' = \left[\frac{(c-s^2)\,\Delta_p^*(s)\,u_0(s)\,l(s)}{g^*(s)} + u_0(s)\,l(s)\,(\mathbf{k}_-' - \mathbf{l}_0' - \mathbf{l}_+')\,U_p^{-1}\mathbf{m}\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[u_0(s)\,l(s)\,(\mathbf{k}_-' - \mathbf{l}_0' - \mathbf{l}_+')\,U_p^{-1}P - \frac{u_0(s)\,l(s)}{g^*(s)}\,\mathbf{n}_* A\right].$$

Здесь вектор $\mathbf{k}_-'$ определяется из разложения (7), причем в этом случае матрица $H = DU_p$, где $U_p$ — результат факторизации матрицы $(S_\psi + PS_\varphi P_*)$, по предположению удовлетворяющей всем необходимым для этого требованиям ([1]),

$$S_\psi + PS_\varphi P_* = U_p U_{p^*},$$

$\mathbf{l}_0'$ и $\mathbf{l}_+'$ — слагаемые разложения вектора $-\frac{1}{g^*(s)}\,\mathbf{n}_* AS_\varphi P_* U_{p^*}^{-1}$ на полиномы от $s$ ($\mathbf{l}_0'$) и правильные дроби, имеющие полюсы только в левой ($\mathbf{l}_+'$) и только в правой ($\mathbf{l}_-'$) полуплоскостях $s$,

$$-\frac{1}{g^*(s)}\,\mathbf{n}_* AS_\varphi P_* U_{p^*}^{-1} = \mathbf{l}_0' + \mathbf{l}_+' + \mathbf{l}_-',$$

$l(s)$ — общий знаменатель элементов вектора $\mathbf{l}_+'$, $u_0(s)$ — общий знаменатель элементов матрицы $U_p^{-1}$.

При учете погрешностей измерения фазовых координат объекта не удается указать класс возмущений типа (10), относительно которых регулятор сохраняет свойство оптимальности. Это объясняется тем, что задача синтеза оптимальной системы стабилизации в такой постановке уже не может быть сведена к задаче аналитического конструирования регуляторов.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
6 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. S. Youla, IRE Trans., IT-7, № 3, 172 (1961). [2] А. М. Летов, Автоматика и телемеханика, 21, № 4, 436 (1960).