Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 536.2 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Б. Я. ЛЮБОВ, Э. М. КАРТАШОВ

МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ПО ПРОИЗВОЛЬНОМУ ЗАКОНУ

(Представлено академиком Г. В. Курдюмовым 19 III 1970)

Рассматривается первая линейная тепловая задача в декартовой и цилиндрической (радиальный поток) системах координат:

$$\frac{\partial T_m}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T_m}{\partial x^2} + \frac{\delta_m}{x}\frac{\partial T_m}{\partial x}\right); \quad \begin{matrix} m = 1, 2; & m = 1 \to \delta_1 = 0, & 0 < x < y(t); \\ t > 0; & m = 2 \to \delta_2 = 1, & 0 \leqslant x < y(t); \end{matrix}$$

$$T_1(x, t)\,|_{x=0} = \varphi_1(t), \quad T_m(x, t)\,|_{x=y(t)} = \varphi_{m+1}(t), \tag{I}$$

$$|T_2(x, t)| < +\infty, \;\; 0 \leqslant x \leqslant y(t), \;\; \varphi_i(0) = 0, \;\; i = 1, 2, 3; \;\; t \geqslant 0.$$

Здесь $y(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция. Не ограничивая общности, можно считать $y(0) = 0$; отсюда при $t = 0$ рассматриваемая область изменения переменной x сосредоточена в точке $x = 0$ и имеет температуру, равную нулю. Заметим, что в сферической системе координат подстановкой $\theta(x, t) = x^{-1}T_1(x, t)$ задача относительно $\theta(x, t)$ сводится к соответствующей ей задаче (I) для стержня $(m = 1)$. С помощью подстановки $z = x[y(t)]^{-1}$ переходим к подвижной системе координат, в которой функция $U_m(z, t)$, связанная с функцией $T_m(z, t) \equiv T_m(x, t)\,|_{x=zy(t)}$ соотношением [1]

$$T_m(z, t) = U_m(z, t)\,[y(t)]^{-1/2m} \exp\left[-\frac{y(t)\cdot y'(t)}{4a} z^2\right], \quad m = 1,2,$$

является решением задачи (I) в системе координат (z, t).

Введем новое «время» t' соотношением $dt'/dt = [y^2(t)]^{-1}$ и перейдем к задаче (I) относительно $U_m(z, t)$ в систему координат (z, t'). Окончательно после всех преобразований

$$\frac{\partial U_m}{\partial t'} = a\left(\frac{\partial^2 U_m}{\partial z^2} + \frac{\delta_m}{z}\frac{\partial U_m}{\partial z}\right) + \frac{\beta(t')}{4a} z^2 U_m; \tag{1}$$

$$U_1(z, t')\,|_{z=0} = \psi_1(t'), \quad t' \geqslant 0; \tag{2}$$

$$U_m(z, t')\,|_{z=1} = \psi_{m+1}(t'), \quad t' \geqslant 0, \quad m = 1, 2; \tag{3}$$

$$|U_2(z, t')| < +\infty, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \quad t' \geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь $\psi_i(t')$ $(i = 1, 2, 3)$, $\beta(t')$ — новые (известные) функции.

В пространстве изображений (по Лапласу) решение преобразованного уравнения (1)

$$\frac{d^2\overline{U}_m}{dz^2} + \frac{\delta_m}{z}\frac{d\overline{U}_m}{dz} - \frac{p}{a}\overline{U}_m = -\frac{z^2}{4a^2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{\beta}(\alpha)\,\overline{U}_m(z, p-\alpha)\,d\alpha \;(m = 1,2) \tag{5}$$

с условиями

$$\overline{U}_1(0,\ p)=\overline{\psi}_1(p);\ \ \overline{U}_m(1,\ p)=\overline{\psi}_{m+1}(p);\ \ |\overline{U}_2(z,\ p)|<+\infty,$$
$$0\leqslant z\leqslant 1 \tag{6}$$

ищем в виде формального ряда

$$\overline{U}_m(z,\ p)=\overline{U}_{m,\,0}(z,\ p)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2a)^{2n}}\overline{U}_{m,\,n}(z,\ p),\quad m=1,2, \tag{7}$$

считая этот ряд равномерно сходящимся относительно переменной z; позже это предположение легко проверяется. Равенства (5) и (7) дают рекуррентные дифференциальные соотношения для функций $\overline{U}_{m,\,n}(z,\ p)$ $(n\geqslant 0)$:

$$\frac{d^2\overline{U}_{m,\,n}}{dz^2}+\frac{\delta_m}{z}\frac{d\overline{U}_{m,\,n}}{dz}-\frac{p}{a}\overline{U}_{m,\,n}=-\delta_n\frac{z^2}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\overline{\beta}(\alpha)\overline{U}_{m,\,n-1}(z,\ p-\alpha)\,d\alpha, \tag{8}$$
$$\delta_0=0;\quad \delta_n=1\ \ (n\geqslant 1).$$

Если от функций $\overline{U}_{m,\,n}(z,\ p)$ потребовать выполнения условий

$$\overline{U}_{1,0}(0,\ p)=\overline{\psi}_1(p),\ \ \overline{U}_{m,\,0}(1,\ p)=\overline{\psi}_{m+1}(p),\ \ |\overline{U}_{2,\,n}(z,\ p)|<+\infty,$$
$$0\leqslant z\leqslant 1,\quad n\geqslant 0; \tag{9}$$

$$\overline{U}_{1,\,n}(0,\ p)=0,\ \ \overline{U}_{m,\,n}(1,\ p)=0,\ \ n\geqslant 1,\ \ m=1,\ 2, \tag{10}$$

то $\overline{U}_m(z,\ p)$ в виде ряда (7) будет решением задачи (5), (6). Решая уравнение (8) с граничными условиями (9), (10) получаем после перехода в классе оригиналов

$$U_{m,\,0}(z,\ t')=\delta_{3-m}a\int\limits_0^{t'}\psi_m(\tau)\left.\frac{\partial G_m}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}d\tau-a\int\limits_0^{t'}\psi_{m+1}(\tau)\left.\frac{\partial G_m}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}d\tau, \tag{10'}$$
$$m=1,\ 2;\ \delta_1=0;\ \delta_2=1.$$

Здесь $G_m(z,\ t'-\tau,\ \xi)$ — функции Грина первой краевой задачи уравнения теплопроводности для стержня $(m=1,\ 0<z<1)$ и цилиндра $(m=2;\ 0\leqslant z<1)$, имеющие вид соответственно

$$G_1(z,\ t'-\tau,\ \xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t'-\tau)}}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(z-\xi-2k)^2}{4a(t'-\tau)}\right]-\right.$$
$$\left.-\exp\left[-\frac{(z+\xi+2k)^2}{4a(t'-\tau)}\right]\right\}=2\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left[-(k\pi\sqrt{a})^2(t'-\tau)\right]\sin k\pi z\cdot\sin k\pi\xi; \tag{11}$$

$$G_2(z,\ t'-\tau,\ \xi)=2\xi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_k z)}{J_1^2(\alpha_k)}\cdot J_0(\alpha_k\xi)\exp\left[-a\alpha_k^2(t'-\tau)\right]; \tag{12}$$

α_k — корни уравнения $J_0(\alpha)=0$.

$$U_{m,\,n}(z,\ t')=a\int\limits_0^{t'}\beta(\tau)\,A_{m,\,n-1}(z,\ t'-\tau,\ \tau)\,d\tau,\quad m=1,\ 2,\quad n\geqslant 1, \tag{13}$$

где

$$A_{m,\,n-1}(z,\ t'-\tau,\ \tau)=\int\limits_0^1\xi^2U_{m,n-1}(\xi,\ \tau)\,G_m(z,\ t'-\tau,\ \xi)\,d\xi,\quad m=1,\ 2. \tag{14}$$

Как видно из (14), функция $A_{m,\,n-1}$ является решением следующей краевой задачи уравнения теплопроводности [2]:

$$\frac{\partial A_{m,\,n-1}}{\partial t'} = a\left(\frac{\partial^2 A_{m,\,n-1}}{\partial z^2} + \frac{\delta_m}{z}\frac{\partial A_{m,\,n-1}}{\partial z}\right);$$

$$m = 1 \to \delta_1 = 0, \quad 0 < z < 1; \quad t' > \tau;$$

$$m = 2 \to \delta_2 = 1; \quad 0 \leqslant z < 1; \quad n \geqslant 1;$$

$$A_{m,\,n-1}(z,\, t' - \tau,\, \tau)\,|_{t'=\tau} = z^2 U_{m,\,n-1}(z,\, \tau),$$

$$m = 1 \to 0 < z < 1; \; m = 2 \to 0 \leqslant z < 1;$$

$$A_{m,\,n-1}(z,\, t' - \tau,\, \tau)\,|_{z=0;\,1} = 0, \quad t' > \tau,\ m = 1,\, 2;$$

$$|A_{2,\,n-1}(z,\, t' - \tau,\, \tau)| < +\infty, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \quad t' \geqslant \tau.$$

Начальное условие здесь понимается в предельном смысле, т. е.

$$\lim_{t'\to\tau} A_{m,\,n-1}(z, t' - \tau, \tau) = z^2 U_{m,\,n-1}(z, \tau), \quad m = 1, 2, \quad n \geqslant 1.$$

Таким образом

$$U_{m,\,n}(z, \tau) = \lim_{t'\to\tau} a\int_0^{t'} \beta(\tau)\, A_{m,\,n-1}(z, t' - \tau, \tau)\, d\tau =$$

$$= az^2 \int_0^{\tau} \beta(\tau_1)\, U_{m,\,n-1}(z, \tau_1)\, d\tau_1 \quad (n \geqslant 1;\ m = 1, 2). \tag{15}$$

Равенства (14), (15) позволяют получить решения рекуррентного уравнения (13) в виде

$$U_{m,\,n}(z, t') = a^n \int_0^{t'} \beta(\tau)\, d\tau \int_0^{\tau} \beta(\tau_1)\, d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \beta(\tau_2)\, d\tau_2 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{n-2}} \beta(\tau_{n-1})\, d\tau_{n-1} \int_0^1 \xi^{2n} U_{m,\,0}(\xi, \tau_{n-1})\, G_m(z, t' - \tau, \xi)\, d\xi, \quad (m = 1, 2;\ n \geqslant 1),$$

где $U_{m,\,0}$, G_m — известные функции (10′) — (12).

Нетрудно убедиться, что ряд

$$U_m(z, t') = U_{m,\,0}(z, t') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2a)^{2n}} U_{m,\,n}(z, t') =$$

$$= U_{m,\,0}(z, t') + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4a)^n} \int_0^{t'} \beta(\tau)\, d\tau \int_0^{\tau} \beta(\tau_1)\, d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \beta(\tau_2)\, d\tau_2 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{n-2}} \beta(\tau_{n-1})\, d\tau_{n-1} \int_0^1 \xi^{2n} U_{m,\,0}(\xi, \tau_{n-1})\, G_m(z, t' - \tau, \xi)\, d\xi \tag{16}$$

сходится равномерно при всех $0 \leqslant z < 1$ и $t' > 0$ в любом промежутке $[0, t']$, так как мажорируется сходящимся для всех $t' > 0$ рядом

$$N \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n (t')^{n+1}}{(4a)^n (n+1)!\,(2n+1)}, \quad N, M = \text{const}.$$

Но из этого следует, что ряд (16) для $U_m(z, t')$ (и аналогично ряд для $\partial U_m / \partial z$) сходится абсолютно и равномерно относительно z на любом отрезке изменения $t' > 0$ и является решением задачи (1) — (4). Зная $U_m(z, t')$, нетрудно теперь возвратиться в систему координат (x, t) и получить искомое решение поставленной задачи (I).

Переходя к области $x > y(t)$, рассмотрим тепловую задачу

$$\partial T / \partial t = a\, \partial^2 T / \partial x^2,\ x > y(t),\ t > 0;\ y(0) = 0;\ T(x, t)\,|_{t=0} = 0,$$

$$x \geqslant 0;$$

$$T(x, t)\,|_{x=y(t)} = \psi(t), \quad t \geqslant 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} T(x, t) = 0,\ t \geqslant 0.$$

Начальное условие примем нулевым, так как, упрощая выкладки, это не уменьшает общности задачи. Для полуограниченной области подвижная система координат (z, t) вводится с помощью подстановки $z = x - y(t)$, в которой функция $U(z, t)$, связанная с функцией $T(z, t) = T(x, t)\,|_{x=z+y(t)}$ соотношением [3]

$$T(z, t) = U(z, t) \exp\left[-\frac{1}{2a}\left(zv(t) + \frac{1}{2}\int v^2(t)\, dt\right)\right],$$

где $v(t) = dy / dt$, является решением задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{v'(t)}{2a} zU, \quad z > 0, \quad t > 0; \tag{17}$$

$$U(z, t)\,|_{t=0} = 0,\ z \geqslant 0; \tag{18}$$

$$U(z, t)\,|_{z=0} = \varphi(t) \exp\left(\frac{1}{4a} \int v^2(t)\, dt\right) = \psi(t),\ t \geqslant 0;\ \lim_{z \to \infty} U(z, t) = 0,\ t \geqslant 0. \tag{19}$$

Поступая дальше аналогичным образом, найдем решение задачи (17) — (19) в виде

$$U(z, t) = U_0(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2a)^n} \int_0^t v'(\tau)\, d\tau \int_0^{\tau} v'(\tau_1)\, d\tau_1 \int_0^{\tau_1} v'(\tau_2)\, d\tau_2 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{n-2}} v'(\tau_{n-1})\, d\tau_{n-1} \int_0^{\infty} \xi^n U_0(\xi, \tau_{n-1})\, G(z, t - \tau, \xi)\, d\xi, \tag{20}$$

где $U_0(z, t) = a \int_0^t \psi(\tau) \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} d\tau$, а $G(z, t - \tau, \xi)$ — функция Грина первой линейной тепловой задачи в области $z > 0$,

$$G(z, t - \tau, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a (t - \tau)}} \left\{\exp\left[-\frac{(z - \xi)^2}{4a(t - \tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(z + \xi)^2}{(4a(t - \tau))}\right]\right\}.$$

Сходимость ряда (20) может быть исследована аналогичным образом.

Поступило
17 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. А. Гринберг, ПММ, 33, № 2 (1969); ПММ, 33, № 6 (1969). [2] Х. С. Карслоу, Д. К. Егер, Теплопроводность твердых тел. «Наука», 1964. [3] Е. М. Карташов, Б. Я. Любов, Г. М. Бартенев, Изв. высш. учебн. завед., Физика, № 12 (1970).