Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. М. МОРДАШЕВ

О ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, НАИЛУЧШИМ ОБРАЗОМ ПРИБЛИЖАЮЩЕЙСЯ СУММОЙ ФУНКЦИЙ МЕНЬШЕГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком М. Д. Миллионщиковым 19 XI 1970)

Пусть заданы $\mathcal{D} = \{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i;\ i = 1,\ 2, \ldots,\ n\}$ — n-мерный параллелепипед; $\sigma_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество n независимых переменных;

$$\chi(\sigma_n) = \chi_1(x_1)\cdot\chi_2(x_2)\cdot\ldots\cdot\chi_n(x_n),$$

где

$$\int\limits_{a_i}^{b_i} d\chi_i(x_i) = 1, \quad d\chi_i(x_i) \geqslant 0;$$

$\varphi_1(\sigma_n), \varphi_2(\sigma_n), \ldots, \varphi_k(\sigma_n)$ — множество линейно независимых и χ-интегрируемых с квадратом в $\mathcal{D}$ функций от n переменных; $\{\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^m\}$ — комбинация множеств переменных, являющихся подмножествами σ_n такими, что $\tau^i \not\subseteq \tau^j$ при $i \neq j$.

Справедлива

Теорема. *Существуют вектор коэффициентов $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*)$ и связанная с ним функция*

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant m} f_j^*(\tau^j) = \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \alpha_i^*\psi_i(\sigma_n),$$

где $\psi_i(\sigma_n)$ — функция, реализующая наилучшее среди всех функций вида $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant m} f_j(\tau^j)$ квадратичное приближение функции $\varphi_i(\sigma_n)$ в $\mathcal{D}$ [1], такие, что

$$\inf_{\alpha,\, f} \frac{\int\limits_{\mathcal{D}}\Big[\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\alpha_i\varphi_i(\sigma_n) - \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant m} f_j(\tau^j)\Big]^2 d\chi(\sigma_n)}{\int\limits_{\mathcal{D}}\Big[\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\alpha_i\varphi_i(\sigma_n)\Big]^2 d\chi(\sigma_n)} =$$

$$= \frac{\int\limits_{\mathcal{D}}\Big[\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\alpha_i^*\{\varphi_i(\sigma_n) - \psi_i(\sigma_n)\}\Big]^2 d\chi(\sigma_n)}{\int\limits_{\mathcal{D}}\Big[\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\alpha_i^*\varphi_i(\sigma_n)\Big]^2 d\chi(\sigma_n)} = 1 - \lambda_{\max},$$

где $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение (ему соответствует собственный вектор α^*), удовлетворяющее условию

$$|S - \lambda Q| = 0.$$

Матрицы Q и S равны соответственно

$$Q = (q_{ij})_1^k, \quad q_{ij} = \int\limits_{\mathcal{D}} \varphi_i(\sigma_n)\cdot\varphi_j(\sigma_n)\, d\chi(\sigma_n),$$

$$S = (s_{ij})_1^k, \quad s_{ij} = \int\limits_{\mathcal{D}} \psi_i(\sigma_n)\cdot\psi_j(\sigma_n)\, d\chi(\sigma_n).$$

Если $\lambda_{\max}$ — простое собственное значение, то вектор α^* единственный (с точностью до постоянного множителя).

Автор благодарен В. А. Ходакову за полезное обсуждение.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило
3 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Мордашев, Математические заметки, 5, № 2, 217 (1969).