Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 519.214

МАТЕМАТИКА

А. В. НАГАЕВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЫБОРОЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕССА

(Представлено академиком Ю. В. Линником 16 XI 1970)

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — независимые наблюдения над нормально распределенной случайной величиной ξ. Приводимая теорема 1 не потеряет общности, если положить

$$M\xi = 0, \quad D\xi = 1.$$

Образуем статистики

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}, \quad s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2.$$

Как известно (см., например, [1], стр. 418) случайные величины $\bar{x}$ и s^2 независимы, причем $\bar{x}$ распределена нормально с параметрами $(0, 1/n)$, а s^2 имеет распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы. Следующие две статистики известны под названием коэффициента асимметрии и эксцесса соответственно:

$$g_1 = \frac{1}{ns^3}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^3, \quad g_2 = \frac{1}{ns^4}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^4 - 3.$$

Статистики g_1 и g_2 в приложениях часто используются в качестве критерия для проверки нормальности распределения случайной величины ξ. Этот критерий основан на том, что вектор $\sqrt{n}(g_1, g_2)$ распределен асимптотически нормально с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей вторых моментов вида

$$B = \begin{Vmatrix} G & 0 \\ 0 & 24 \end{Vmatrix}.$$

Иногда удобнее иметь дело с вероятностями $P\{|g_1| > t\}$, $P\{|g_2| > t\}$ и $P\{t_1^{-2}g_1^2 + t_2^{-2}g_2^2 > 1\}$. Эти вероятности при фиксированных t, t_1 и t_2 являются, по существу, вероятностями больших уклонений для статистик g_1 и g_2. Ясно, что довольно сложный вид статистик не позволяет непосредственно применять методы, обычно используемые при оценивании вероятностей больших уклонений сумм независимых слагаемых. Тем не менее, используя специфические свойства нормального закона распределения, а также методы, примененные в работах [2-4], удается доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *В наших обозначениях при $n \to \infty$ и любых фиксированных t, t_1 и t_2*

1°. $$P\{|g_1| > t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^{2/3} t^{-1/3} \exp\left\{-\frac{1}{2} n^{2/3} t^{2/3} + n^{1/3}\left(\frac{t^{4/3}}{4} + \frac{4}{3} t^{-2/3}\right) - \frac{t^2}{6} + 3t^{-2}\right\}(1 + o(1));$$

2°. $$P\{|g_2| > t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^{3/4} t^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2} n^{1/2} t^{1/2} + 3t^{-1} + \frac{1}{4} t^{-1}(t+3)^2\right\} \times (1 + o(1));$$

3^0. $P\{t_1^{-2}g_1^2 + t_2^{-2}g_2^2 > 1\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^{3/4} t_2^{-1/4} \exp\Big\{-\frac{1}{2} n^{1/2} t_2^{1/2} + 3t_2^{-1} +$
$+ \frac{1}{4} t_2^{-1} (3 + t_2)^2 + \frac{1}{8} t_1^{-2} t_2^2\Big\} (1 + o(1))$.

Третье утверждение теоремы 1 доказывается с помощью следующего результата, не лишенного, по-видимому, и самостоятельного интереса.

Положим

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} x_j^3, \quad Y_n = \sum_{j=1}^{n} (x_j^4 - 3).$$

Легко видеть, что случайный вектор $\sqrt{n}(X_n, Y_n)$ распределен асимптотически нормально с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей B.

Теорема 2. *В наших условиях при $n \to \infty$, $c > 0$,*

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| P\{X_n < x \mid y \leqslant Y_n < y + 1\} - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x - y^{3/4}}{\sqrt{15n}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x + y^{3/4}}{\sqrt{15n}}\right) \right| = o(1).$$

Таким образом, функциональная зависимость между x_1^3 и $x_1^4 - 3$, которая не играла роли в области нормальных уклонений, начинает сильно сказываться в области больших уклонений.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
30 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Крамер, Математические методы статистики, ИЛ, М., 1948. [2] А. В. Нагаев, Теория вероят. и ее примен., 14, 1, 51 (1969). [3] А. В. Нагаев, Литовск. матем. сборн., 3, 3, 553 (1968). [4] А. В. Нагаев, ДАН, 193, № 3, 528 (1970).