Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 510.1:517.12 *МАТЕМАТИКА*

А. С. КУЗИЧЕВ

F^n-СИСТЕМЫ КОМБИНАТОРНОЙ ЛОГИКИ. ОБОБЩЕННЫЙ АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

(Представлено академиком П. С. Новиковым 2 XII 1970)

В работе предлагается построение последовательности расширяющихся систем комбинаторной логики на основе модификации принципа дедуктивной полноты с помощью введения иерархии функциональности (по поводу понятия функциональности см. ([1-3])). При этом за систему нулевого уровня (F^0-систему) принимается теория комбинаторов в логистической формулировке Карри ([2]).

I. F^n-системы (построение, свойства). Алфавит: $KSOF$ $()\square|$.

Переменные. Если x — непустое слово в алфавите $\square$, то $|x|$ считается переменной. Переменные обозначаются буквами x, y, z, t (возможно с индексами); выражение «$x \overline{\in} U_1, \ldots, U_m$» означает, что переменная x не имеет вхождений в $U_1, \ldots, U_m$, $m > 0$.

0-обы. 1) K, S, Q считаются 0-обами; 2) переменные считаются 0-обами; 3) если U и T суть 0-обы, то (UT) считается 0-обом.

Схема аксиом (ρ). $((QU)U)$, где U есть 0-об.

Правила вывода F^0-системы. 1) Комбинаторные правила:

$$[S_-]: \frac{(X(((ST)U)V))}{(X((TV)(UV)))}; \quad [K_-]: \frac{(X((KT)U))}{(XT)}; \quad (I_-): \frac{(IT)}{T};$$

$$[S_+]: \frac{(X((TV)(UV)))}{(X(((ST)U)V))}; \quad [K_+]: \frac{(XT)}{(X((KT)U))}; \quad (I_+): \frac{T}{(IT)};$$

2) принцип Лейбница (Q_-): $\dfrac{((QT)U),\ (XT)}{(XU)}$; в правилах X, U, T, V суть 0-обы, $I \rightleftharpoons ((SK)K)$, где $\rightleftharpoons$ — знак равенства по определению.

Оператор функциональности. 1) F считается оператором функциональности 1-го уровня; 2) если α — оператор функциональности i-го уровня, $i > 0$, то $\alpha|$ считается оператором функциональности $(i+1)$-го уровня. Оператор функциональности i-го уровня обозначается через F^i.

n-обы, $n > 0$. 1) Если U есть $(n-1)$-об, то U считается n-обом; 2) оператор F^n считается n-обом; 3) если U, T суть n-обы, то (UT) считается n-обом.

Правила вывода F^n-системы, $n > 0$, $k \geqslant 0$, $x \overline{\in} U, T, M$:

$$(F^{n-1}F^n): \frac{U_1, \ldots, U_k \overset{n-1}{\vdash} V}{U_1, \ldots, U_k \overset{n}{\vdash} V}, \quad (F^n_+): \frac{U_1, \ldots, U_k, (Ux) \overset{n-1}{\vdash} (T(Mx))}{U_1, \ldots, U_k \overset{n}{\vdash} (((F^nU)T)M)};$$

здесь $U_1, \ldots, U_k, V, U, T, M$ суть $(n-1)$-обы, эти правила считаются правилами переноса и введения F соответственно, запись вида «$H_1, \ldots, H_k \overset{i}{\vdash} H$» означает, что в F^i-системе из посылок $H_1, \ldots, H_k$ выводим H, $k \geqslant 0$ (при $k = 0$ имеем $\overset{i}{\vdash} H$ — «в F^i-системе доказуемо H»), $i \geqslant 0$.

В F^n-системе постулируются также комбинаторные правила (см. F^0-систему), при этом X, T, U, V в них суть n-обы.

Используя результаты ([2]), нетрудно доказать при $0 < i \leqslant n$, $k \geqslant 0$

$$(F^nF^{n-i}): \frac{U_1, \ldots, U_k \overset{n}{\vdash} V}{U_1, \ldots, U_k \overset{n-i}{\vdash} V}, \quad (F^n_-): \frac{\overset{n}{\vdash} F^nUTM \quad \overset{n-1}{\vdash} UX}{\overset{n-1}{\vdash} T(MX)},$$

где $U_1, \ldots, U_k$, V суть $(n-i)$-обы; U, T, M, X — $(n-1)$-обы. Первое правило считается правилом спуска, второе — правилом исключения F или принципом F. В принципе F выражения F^nUTM, UX, $T(MX)$ есть сокращения для $(((F^nU)T)M)$, (UX), $(T(MX))$, некоторые скобки в n-обах, $n \geqslant 0$, опускаются при условии, что они легко могут быть восстановлены по принципу: «скобки относятся влево» ([2]).

II. Оператор функциональной абстракции. Пусть U есть n-об, $n \geqslant 0$.

1) Если $x \overline{\in} U$, то оператор функциональной абстракции $[x]U \rightleftharpoons KU$;

2) если $U \doteq x$ ($\doteq$ — знак графического равенства), то $[x]U \rightleftharpoons I$;

3) если $U \doteq TM$ и в T или M есть вхождения x, то $[x]U \rightleftharpoons S[x]T[x]M$, при этом $[x]U \doteq [x](TM)$.

Пусть $[T_1, \ldots, T_m / x_1, \ldots, x_m]U$ — результат подстановки n-обов $T_1, \ldots, T_m$ в n-об U вместо всех соответствующих вхождений переменных $x_1, \ldots, x_m$, $m > 0$, тогда

$$(\beta): [x_1 \ldots x_m]UT_1 \ldots T_m \leftrightarrow [T_1, \ldots, T_m / x_1, \ldots, x_m]U,$$

где $[x_1 \ldots x_m]U \rightleftharpoons [x_1] \ldots [x_m]U$; запись вида «$M \leftrightarrow T$» означает, что $M \overset{n}{\vdash} T$ и $T \overset{n}{\vdash} M$, M и T суть n-обы, $n \geqslant 0$.

Определения. $Z_0 \rightleftharpoons [xy]y$; $\hat{S} \rightleftharpoons [xyz](y(xyz))$; $Z_{k+1} \rightleftharpoons \hat{S}Z_k$, $k \geqslant 0$; $D_2 \rightleftharpoons [xyz](zKy)x)$ ($\hat{S}$ — комбинатор следования, Z_k — аналог натурального числа k. D_2 — комбинатор пары ([1, 2])).

Обобщение оператора функциональности. Пусть $n > 0$. $F^{n,0} \rightleftharpoons I$, $F^{n,1} \rightleftharpoons F^n$, $F^{n,m+1} \rightleftharpoons [xy_1 \ldots y_mz](F^{n+m}x(F^{n,m}y_1 \ldots y_mz))$.

Учитывая свойства описанных комбинаторов, нетрудно доказать следующие теоремы об их функциональном характере (при этом вместо $U_1, \ldots, U_k \overset{m}{\vdash} M^mX_1 \ldots X_r$ пишется $U_1, \ldots, U_k \vdash M^mX_1 \ldots X_r$; m, k, $r \geqslant 0$).

$$(F\hat{S}): \vdash F^{m+2,3}(F^{m,2}(F^nUT)MU)(F^nUT)MTS,$$

где U, T суть $(n-1)$-обы, M есть $(m-1)$-об, $m = n + r$, $n > 0$, $r \geqslant 0$.

$$(FZ_k): \vdash F^{n+2k+1,2}(F^nUU)UUZ_k,$$

где U есть $(n-1)$-об, $n > 0$, $k \geqslant 0$.

$$(FD_2): \vdash F^{n+3,3}UT(F^{n+1,2}(F^nMT)UV)VD_2,$$

где U, T, M, V суть $(n-1)$-обы, $n > 0$.

III. Конъюнкция. $\&^{n+3} \rightleftharpoons [xy](F^{n+3}(F^{n+1,2}(F_nI)II)I(D_2xy))$, где $F_n \rightleftharpoons [x](F^nxx)$, $n > 0$. Используя теоремы о функциональном характере чисел Z_k и комбинатора D_2, выводим правила введения и удаления конъюнкции.

$(\&^n_+)$. Если U, T суть $(n-4)$-обы, $n > 3$, и если $\overset{n-3}{\vdash} U$, $\overset{n-4}{\vdash} T$, то $\vdash \&^nUT$.

$(\&^{n+1}_-)_1$. Если $\vdash \&^{n+1}UT$, то $\overset{n}{\vdash} U$, где U, T суть n-обы, $n > 2$,

$(\&^{n+1}_-)_2$. Если $\vdash \&^{n+1}UT$, то $\overset{n}{\vdash} T$, где U, T суть n-обы, $n > 2$.

Арифметический оператор:

$$N^{n+r} \rightleftharpoons [x](F^{n+r}[y](\&^{n+3}(F_{yy}{}^{n}\hat{S})(yZ_0))[y],\ (yx)I),\ n>0,\ r>3.$$

Теорема (принцип индукции). *Если U и X соответственно $(n-1)$-, $(n+3)$-обы, $n>0$, и если $\vdash N^{n+4}X$, $\overset{n-1}{\vdash} F^nUU\hat{S}$ и $\overset{n+3}{\vdash} UZ_0$, то $\vdash UX$.*

(Доказательство основывается на $(\&_+^{n+3})$, (β), (F_-^{n+4}).)

Свойства конъюнкции и принцип индукции дают предложения $\vdash N^{n+k}Z_k$ и $\vdash F^{n+2}N^nN^{n+1}\hat{S}$, $n>4$, $k\geqslant 0$.

IV. Обобщенный арифметический оператор. Пусть $m>0$, $k\geqslant 0$, $n=m+2k+1$.

$$N_{m,k} \rightleftharpoons [x](F^{n+8}[y](\&^{n+7}(F_{m,k}y\hat{S})(F_{m,0}yZ_0))[y](yx)I),$$

где $F_{m,k} \rightleftharpoons [x](F^{n,2}(F_mx)xx)$, $F_{m,k} \rightleftharpoons [x](F^{n+2,3}(F_{m,k}x)(F_mx)xx)$.

Теорема $(FN_{m,k})$: *$\vdash F^{n+9}N_{m,k}UI$, где U есть $(m-1)$-об, $m>0$, $k\geqslant 0$.*

(Доказательство получается из $(F\hat{S})$ (при $n=m$, $r=2k+1$, $T \eqcirc M \eqcirc U$), (FZ_0) и допущения $\vdash N_{m,k}x$ по $(\&_+^{n+7})$, (β), (F_-^{n+8}), (F_+^{n+9}), (I_-), (I_+).)

Из $(FN_{m,k})$ следует обобщенный принцип индукции: *если $\vdash N_{m,k}X$, то $\overset{n+7}{\vdash} UX$, где U и X суть $(m-1)$-* и $(n+7)$-обы.

Из обобщенного принципа индукции (при $X \eqcirc x$ и $U \eqcirc [x](T(Mx))$) вытекает утверждение (FM): $\vdash F^{n+9}N_{m,k}TM$ *о функциональном характере $(m-1)$-оба M, где T — также $(m-1)$-об.*

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 18 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. B. Curry, Trans. Am. Math. Soc., 50, № 3, 454 (1941). [2] H. B. Curry, R. Feys, Combinatory Logic, Amsterdam, 1958. [3] R. Hindley, Trans. Am. Math. Soc., 146, Dec., 29 (1969).