Группы с ограничениями на максимальные подгруппы силовских подгрупп

В. С. Монахов, А. А. Трофимук

Рассматриваются только конечные группы. Терминология и обозначения соответствуют [**1**].

Признаки сверхразрешимости группы с ограничениями на максимальные подгруппы из силовских подгрупп группы получали многие авторы, см., например, литературу в [**2**]. Группы, в которых некоторые подгруппы содержатся в подгруппах простых индексов, изучались в [**3**]–[**4**].

В настоящей работе получена характеризация конечной группы, у которой для любого простого p каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы содержится в подгруппе индекса p, в частности, такие группы сверхразрешимы.

Определение. *Пусть G — сверхразрешимая группа. Тогда она обладает силовской башней $1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G$, сверхразрешимого типа* [**1**, теорема VI.9.1 (c)]. *Если для каждого i все максимальные подгруппы из G_i/G_{i-1} нормальны в G/G_{i-1}, то группу G назовем m-сверхразрешимой.*

Не все сверхразрешимые группы m-сверхразрешимы. Например, группа $Z_3 \times S_3$ сверхразрешима, но не m-сверхразрешима.

Теорема. *Группа G m-сверхразрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, когда для любого $p \in \pi(G)$ каждая максимальная подгруппа из силовской p-подгруппы группы G содержится в некоторой подгруппе (нормальной подгруппе) группы G индекса p.*

Следующий результат используется в доказательстве теоремы и представляет самостоятельный интерес.

Предложение. *Пусть G — p-разрешимая группа и P — её силовская p-подгруппа. Если каждая максимальная подгруппа из P содержится в некоторой подгруппе группы G индекса p, то G p-сверхразрешима.*

Замечание. *Условие p-разрешимости группы в предложении не является лишним. В простой группе A_5 силовская 5-подгруппа P имеет простой порядок. Все максимальные подгруппы из P (они единичны) содержатся в подгруппе $H \simeq A_4$ и $|A_5 : H| = 5$.*

Список литературы

[1] Huppert B. Endliche Gruppen. I. — Berlin: Springer-Verl., 1967.

[2] Monakhov V. S., Trofimuk A. A. Finite groups with subnormal non-cyclic subgroups // J. Group Theory. Vol. 17, N 5. 2014. P. 889–895.

[3] Berkovich Y., Kazarin L. Indices of elements and normal structure of finite groups // J. Algebra. Vol. 283, N 3. 2005. P. 564–583.

[4] Монахов В. С., Тютянов В. Н. О конечных группах с некоторыми подгруппами простых индексов // Сиб. матем. журн. Т. 48, N 4. 2007. С. 833–836.

Гомельский университет им. Ф. Скорины, Гомель (Белоруссия)
E-mail: victor.monakhov@gmail.com, alexander.trofimuk@gmail.com