Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 517.55+517.51

МАТЕМАТИКА

Л. С. МАЕРГОЙЗ

ОДНА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 28 X 1970)

В теории роста целых функций многих комплексных переменных важную роль играет класс Q конечных выпуклых (в.) функций в $\mathbf{R}^n$, поверхность асимптотического (а.) конуса $A(V)$ надграфика $\det V$ * каждой из которых не содержит вертикальных лучей ([2]).

Настоящая заметка посвящена изучению асимптотики функций класса Q, что приводит к исследованию условий в. полунепрерывного снизу (п.с.) продолжения функции с границы n-мерного в. компакта в $\mathbf{R}^n$ на весь этот компакт (ср. ([3, 4])).

1°. Пусть $V \in Q$; $(u, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i y_i$, $V^*(y) = \sup\limits_{u \in \mathbf{R}^n} [(u, y) - V(u)]$ — преобразование Юнга функции $V(u)$ ([5]), $\operatorname{dom} V^* = \{y \in \mathbf{R}^n: V^*(y) < \infty\}$. Для $V \in Q$ $K_V \overset{\text{опр}}{=} \overline{\operatorname{dom} V^*}$ — компакт ([1]). Мы рассматриваем функции $\{V\}$ класса Q, для которых $\dim K_V = n$ ** $\Gamma = \partial K$.

Определение. Асимптотическим телом $B(V)$ надграфика $\det V$ функции назовем множество $\bigcap\limits_{y \in T} \det \varphi(y)$, где $T = \Gamma \cap \operatorname{dom} V^*$, $\varphi_y(u) = (u, y) - V^*(y)$ — предельная опорная гиперплоскость к $\det V$. $B(V) \overset{\text{опр}}{=} \mathbf{R}^{n+1}$, если $T = \phi$ (ср. ([7, 2])).

Итак, $B(V) = \det \delta_V$, где $\delta_V(u) = \sup\limits_{y \in T} [(u, y) - V^*(y)] = \sup\limits_{y \in \Gamma} [(u, y) - V^*(y)]$. Поверхность $B(V)$ полулинейчатая: она состоит из лучей, параллельных некоторым лучам поверхности а. конуса $A(V)$ надграфика $\det V$, не имеющих, в общем случае, одной вершины, и является своеобразной огибающей асимптот функции V.

Пусть $\mathfrak{P} = \{K\}$ — совокупность n-мерных в. компактов в $\mathbf{R}^n$; $I(\Gamma)$ — совокупность функций, заданных на $\Gamma \overset{\text{опр}}{=} \partial K$ со значениями в $(-\infty, +\infty]$ п.с. и в. на $\forall$ в. подмножествах Γ. Из предыдущего и ([5]), стр. 57, заключаем, что $Q = \bigcup\limits_{K \in \mathfrak{P}} \bigcup\limits_{\psi \in I(\Gamma)} I_\psi(K)$, где $I_\psi(K) = \{V \in Q: K_V = K, V^*|_\Gamma = \psi\}$. У функции $\forall$ непустого класса $I_\psi(K)$ общие а. конус $A(V) = \det \rho$, где $\rho(u)$ — опорная функция компакта K (([1]), стр. 52) и а. тело $B(V) = \det \delta$, где $\delta(u) = \sup\limits_{y \in \Gamma} [(u, y) - \psi(y)]$. Возникает вопрос, может ли $I_\psi(K) = \phi$ при некоторых $\psi \in I(\Gamma)$?

2°. Ниже мы пользуемся следующей символикой: $\operatorname{co} M$ — в. оболочка множества $M \subset \mathbf{R}^k$; M^0 $(\overline{M})$ — внутренность (замыкание) M в топологии $\mathbf{R}^k$; $\operatorname{co}\psi$ — определенная на K наибольшая миноранта функции ψ, заданной на $M \subset K$.

---

* $A(V)$ — максимальный конус с вершиной в $O \in \mathbf{R}^{n+1}$, сдвиг которого можно поместить в $\det V = \{(u, u_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}: u \in \mathbf{R}^n, u_{n+1} \geqslant V(u)\}$ ([1]).

** Случай, когда $\dim K_V = r < n$, фактически сводится к рассматриваемому в ([5]), стр. 23.

З а д а ч а Д и р и х л е. Пусть $K \in \mathfrak{P}$, $I^*(K)$ — класс п.с. в. на K функций, конечных в K^0. Для $\forall$ функции $\psi \in I(\Gamma)$ (см. 1°) найти функцию $V \in I^*(K)$, такую, что $V|_\Gamma = \psi$.

Из одного результата Г. Буземана и др. ((2), стр. 6) непосредственно вытекает, что если конечная функция ψ определена на $\Gamma = \partial K$, ограничена снизу и в. на $\forall$ в. подмножествах Γ, то $\mathrm{co}\psi$ — конечное в. продолжение ψ на K (ср. (5), стр. 57)). Если, кроме того, ψ — п.с. (т.е. $\psi \in I(\Gamma)$), то, как мы убедимся ниже, $\mathrm{co}\psi$ — решение задачи Дирихле для этого частного случая; более того, справедлива

Т е о р е м а 1. *Задача Дирихле разрешима для* $\forall$ *функции* $\psi \in I(\Gamma)$, *причем* $\sup\limits_{V \in I_\psi^*(K)} V = \mathrm{co}\psi$, *где* $I_\psi^*(K)$ — *совокупность всех решений задачи Дирихле для* ψ. *Если* $(\mathrm{co\,dom}\,\psi)^0 = K^0$, *где* $\mathrm{dom}\,\psi = \{y \in \Gamma;\ \psi < +\infty\}$, то $\mathrm{co}\psi \in I_\varphi(K)$.

Л е м м а. *Пусть* φ — *п.с. функция, определенная на компакте* $K \subset \mathbf{R}^n$ *со значениями в* $(-\infty, +\infty]$; S — *надграфик* φ.

Тогда $\mathrm{co}S$ — *замкнутое множество в* $\mathbf{R}^{n+1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $a < \inf\{\varphi(y),\ y \in K\} \overset{\text{опр}}{=\!=} b$. Отображение Φ: $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$, $u_j = y_j(y_{n+1} - a)^{-1}$, $j = 1, \ldots, n$; $u_{n+1} = (y_{n+1} - a)^{-1}$ — проективное преобразование $\mathbf{R}^{n+1}$* Φ гомеоморфно отображает $L = \{(y, y_{n+1}) \in R^{n+1}:\ y_{n+1} > a\}$ на $M = \{(x, x_{n+1}) \in R^{n+1}:\ x_{n+1} > 0\}$. Но S — замкнутое множество ((5), стр. 56), поэтому и $\Phi(S)$ — замкнутое множество в топологии M, индуцированной $\mathbf{R}^{n+1}$, а $\Phi(S) \cup \{0\} \overset{\text{опр}}{=\!=} T$ — компакт $\mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $x \in (\mathrm{co}\,T) \setminus \{0\}$. Тогда $x = \lambda_0 \cdot 0 + \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)}$, $x^{(i)} \in T \setminus \{0\}$, $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$; $\lambda_0 < 1$. Если $\lambda_0 > 0$, то $\sigma \overset{\text{опр}}{=\!=} \sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i < 1$ и $\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\lambda_i}{\sigma} \cdot \sigma x^{(i)} = x$. T — звездное множество относительно точки 0: ограничение Φ на L отрезки переводит в отрезки, а $S = \det\varphi$. Следовательно, $x \in \mathrm{co}(T \setminus \{0\})$ и $(\mathrm{co}T) \setminus \{0\} = \mathrm{co}(T \setminus \{0\}) = \mathrm{co}\Phi(S) = \Phi(\mathrm{co}S) \cdot \mathrm{co}T$ — компакт ((9), стр. 35), а $(\mathrm{co}T) \setminus \{0\}$ замкнуто в M, поэтому $\mathrm{co}S$ замкнуто в L и в $\mathbf{R}^{n+1}$ ($\mathrm{co}S \subset \{(y, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}:\ y_{n+1} \geqslant b\}$).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Пусть $\psi \in I(\Gamma)$, $z \in K^0$; $p(x)$ — функционал Минковского $K - z$ ((10), стр. 113); $q_N(y) = [1 - p(y - z)]^{-1} + N$, если $y \in K^0$; $q_N(y) = +\infty$, если $y \in \Gamma$, где N — любое число, $\varphi_N(y) = \min\{\bar\psi(y), q_N(y)\}$, $\bar\psi(y) = \psi(y)$, если $y \in \Gamma$; $\bar\psi(y) = +\infty$, если $y \in K^0$. Тогда $\mathrm{co}\varphi_N$ — одно из решений задачи Дирихле. В самом деле, $q_N(y)$ непрерывная и, более того, в. функция, так как $p(x)$ — в. в $\mathbf{R}^n$ функция ((10), стр. 116). Поэтому $\varphi_N(y)$ — п.с. функция на K и по лемме $\mathrm{co}\det\varphi_N = I$ — замкнутое множество в $\mathbf{R}^{n+1}$. Но $I = \det\mathrm{co}\,\varphi_N$ и, значит, $\mathrm{co}\varphi_N$ — п.с. функция на K, конечная в K^0; с другой стороны, $\mathrm{co}\varphi_N|_\Gamma = \varphi_N = \psi$ для $\forall N$ ((2), стр. 6), поскольку ψ в. на $\forall$ в.подмножествах Γ. Поэтому же $\sup\limits_N\{\mathrm{co}\varphi_N(y)\} = \mathrm{co}\psi = \psi$ для $y \in \Gamma$.

Замкнутое в.множество $\det\mathrm{co}\psi$ — пересечение полупространств его содержащих и ограниченных невертикальными гиперплоскостями ((6), стр. 14). Тогда для $\forall\varepsilon > 0$, $y_0 \in K^0$ $\exists$ линейная функция $y_{n+1} = l_0(y) = (x_0, y) + c$ такая, что $\psi(y) \geqslant l_0(y)$ $\forall y \in \Gamma$ и либо $l_0(y_0) > \mathrm{co}\,\psi(y_0) - \varepsilon$, если $y_0 \in \Pi \overset{\text{опр}}{=\!=} \mathrm{co\,dom}\,\psi$, либо $l_0(y_0) > \varepsilon$, если $y_0 \in K^0 \setminus \Pi$. Тогда, если $N > \sup\limits_{y \in K} l_0(y)$, то $\mathrm{co}\psi(y_0) \geqslant \mathrm{co}\varphi_N(y_0) \geqslant \min\{N, \bar\psi(y_0)\} \geqslant$

---

* Подобные преобразования встречаются, например, в (8), § 8.

$\geqslant l_0(y_0)$ $(p(y-z) \leqslant 1$ для $\forall y \in K$ (([10]), стр. 116). Наконец, по лемме $\mathrm{co}\psi$ — п.с. функция и конечная для $y \in \mathrm{co\,dom}\,\psi$ (([5]), стр. 57). Отсюда и вытекает последнее утверждение теоремы 1.

Ответ на вопрос о существовании класса $I_\psi(K)$ (см. 1°) дает

Следствие. *Для* $\forall\psi \in I(\Gamma)$ *преобразование Юнга* ([5]) *переводит классы* $I_\psi^*(K), I_\psi(K)$ *и, соответственно, функции*

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{co}\psi(y),\ y \in \mathrm{co\,dom}\,\psi \\ +\infty,\ y \in \mathbf{R}^n \setminus \mathrm{co\,dom}\,\psi \end{array}\right\} = \alpha(y), \quad \delta(u)$$

одну в другую, где $\det\delta$ — *(общее) а. тело функций класса* $I_\psi(K)$, *причем* $\delta(u) = \inf\{V, V \in I_\psi(K)\}$.

Для доказательства достаточно заметить, что $G^{**} = (G^*)^* = G$, если G — п.с.в. функция в $\mathbf{R}^n$, а $\mathrm{co}\psi = \psi^{**}$ (([5]), стр. 59).

3°. Теорема 2. *Для того чтобы функция V из Q удовлетворяла условию*

$$V(u) - \delta_V(u) \to 0, \ \text{если}\ |u|^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2 \to +\infty, \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы $V^* \in I_\psi^*(K)$, *где* $K = \mathrm{dom}\,V^*$, $\psi = V^*|_\Gamma$, $\mathrm{co\,dom}\,\psi = \mathrm{dom}\,V^* = D$, *причем функция* $G(y) = \mathrm{co}\psi(y) - V^*(y)$, $y \in K^0$; $G(y) = 0$, $y \in \Gamma$,— *непрерывная на K (ср.* ([2])) *.

Пусть A, B — непустые множества в $\mathbf{R}^n$; $O_\delta(B)$ — δ-окрестность B; $N(A, B) = \inf\{\delta > 0\colon A \subset O_\delta(B)\}$; $\partial V(u) = \{y \in \mathbf{R}^n\colon V(x) \geqslant V(u) + (y, x-u)\ \forall x \in \mathbf{R}^n\}$ — субдифференциал в. функции V в точке u ([11]); (([12]), стр. 3).

Лемма **. *Пусть V_k — последовательность в. функций, сходящаяся к функции V, причем $\mathrm{dom}\,V_k = \mathrm{dom}\,V = B$, $\forall k$,— область в $\mathbf{R}^n$.*

Тогда при $k \to +\infty$ $\varphi_k(u; C) = N(\partial V_k(u), H) \to 0$, где $H = \bigcup_{x \in C} \partial V(x)$, равномерно на любом компакте $C \subset B$ (ср. с леммой в ([12]), *стр. 13).)*

Доказательство. Рассмотрим δ-окрестность $O_\delta(H)$. Если $S \subset B$ — замкнутый шар с центром в $x_0 \in C$; $\varepsilon > 0$, то $\partial_\varepsilon V(x_0; S) = \{y \in \mathbf{R}^n\colon V(x) + \varepsilon \geqslant V(x_0) + (x - x_0, y)\ \forall x \in S\}$ — компакт, причем $\bigcap_{\varepsilon > 0} \partial_\varepsilon V(x_0; S) = \partial V(x_0)$. Так как $\{\partial_\varepsilon V(x_0; S),\ \varepsilon > 0\}$ — множество вложенных друг в друга компактов, то $\exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$ такое, что $\partial_{\varepsilon_0} V(x_0; S) \subset O_\delta(H)$. Методом от противного нетрудно установить, что $\exists$ окрестность $U(x_0) \subset B$ такая, что $\partial_{\varepsilon_0} V(x; S) \subset O_\delta(H)$ $\forall x \in U(x_0)$ (ср. ([13])). Поскольку V_k сходится к V равномерно на $\forall$ компакте из B (([14]), стр. 1054), то $\exists k_0(\varepsilon_0)$ такое, что при $k \geqslant k_0$ $\partial V_k(u) \subset \partial_{\varepsilon_0} V(u; S)$ $\forall u \in S$. Таким образом, для $\forall k \geqslant k_0$, $u \in S \cap U$ $\partial V_k(u) \subset O_\delta(H)$, т. е. $\lim\limits_{u \to x_0,\, k \to +\infty} N(\partial V_k(u), H) = 0$ для $\forall x_0 \in C$. Отсюда и вытекает лемма: C — компакт.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Из условия (1) и следствия из теоремы 1 вытекает: $\mathrm{dom}\,V^* = \mathrm{dom}\,\delta_V^* = \mathrm{co\,dom}\,\psi$. Предположим, что $\exists$ точка $y_0 \in \Gamma$, последовательность $\{y_k\} \subset D$ такие, что

$$\lim_{y_k \to y_0} [\mathrm{co}\psi(y_k) - V^*(y_k)] = a, \quad 0 < a \leqslant +\infty \ (\mathrm{co}\psi(y) \geqslant V^*(y)). \tag{2}$$

Без ограничения общности можем считать, что $\{y_k\} \in K^0$, так как $V^*(y) = \delta_V^*(y) = \mathrm{co}\psi(y) = \psi(y)$ при $y \in \Gamma$. Поэтому $\{\partial\delta_V^*(y_k)$ — по-

* Условие (1) не всегда выполняется, как показывает пример функции $V(u) = \ln(e^{|u|} + e^{u_1})$.

** Эта лемма была доказана под руководством автора в дипломной работе студентки Красноярского государственного университета Т. А. Пузановой.

следовательность непустых компактов. Пусть $0 < \varepsilon < a$, $CS_t = \{u \in \mathbb{R}^n: |u| > t\}$. Из (1) заключаем: $\exists t_0 = t_0(\varepsilon)$ со свойством

$$(u, y) - \delta_V(u) \leqslant V^*(y) + \varepsilon \quad \forall y \in D,\ u \in CS_t. \tag{3}$$

Если множество $\bigcup \partial\delta_V{}^*(y_k) = H$ не ограничено, то $\exists$ последовательность $\{u_l \in \partial\delta_V{}^*(y_{k_l})\}$ такая, что $|u_l| \to +\infty$ при $l \to +\infty$. Из (3) имеем для $u \in CS_{t_0}$: $\delta_V{}^*(y_{k_l}) = (u_l, y_{k_l}) - \delta_V(u_l) \leqslant V^*(y_{k_l}) + \varepsilon$ ([11]). Но это противоречит (2), поэтому H ограничено. Тогда $\exists$ последовательность $\{u_p \in \partial\delta_V{}^*(y_{k_p})$ со свойством $|u_p - u_0| \to 0$ при $p \to +\infty$, причем $u_0 \in \partial\delta_V{}^*(y_0)$ (([11]), стр. 296). Следовательно, $y_0 \in \operatorname{dom}\psi$:

$$\overset{*}{\delta}_V(y_{k_p}) = (u_p, y_{k_p}) - \delta_V(u_p) \to (u_0, y_0) - \delta_V(u_0) = \overset{*}{\delta}_V(y_0) = \psi(y_0). \tag{4}$$

Поскольку $V^*(y)$ — п.с. функция ([5, 6]), то для $\forall p > p_0(\varepsilon)$ $\delta_V{}^*(y_{k_p}) \geqslant \geqslant V^*(y_{k_p}) \geqslant \psi(y_0) - \varepsilon$. Из (4) сейчас имеем $\lim\limits_{p\to+\infty} [\operatorname{co}\psi(y_{kp}) - - V^*(y_{k_p})] = 0$, что опять противоречит (2).

Достаточность. $G(y)$ — равномерно непрерывная и неотрицательная функция в K, поэтому для $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$0 \leqslant \delta_V{}^*(y) - V^*(y) < \varepsilon;\ (u, y) - V^*(y) \leqslant \delta_V(u) + \varepsilon\ \forall y \in O_\delta(\Gamma) \cap K,\quad u \in R^n.$$

Рассмотрим последовательность $V_t(x) = t^{-1}V(x_1t, \ldots, x_nt)$. Имеем (([1]), стр. 52): $V_t(x) \to \rho(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, где $\rho(x)$ — опорная функция компакта K. Поэтому по лемме для $\forall t > t_0$, $x \in S_1$, $\partial V_t(x) = \partial V(x_1t, \ldots, x_nt) \subset \subset O_\delta(\bigcup\limits_{x\in S_1} \partial\rho(x))$, $S_1 = \{x: |x| = 1\}$. Поскольку

$$\left.\begin{array}{r} 0,\ y \in K \\ +\infty,\ y \in \mathbb{R}^n \setminus K \end{array}\right\} = \rho^*(y)\ (^1),$$

то $\partial\rho(x) = \{y \in K: (x, y) = \rho(x) + \rho^*(y)\}$ ([11]). Следовательно, при $\forall u \in CS_{t_0}$ $\partial V(u) \subset O_\delta(\Gamma) \cap K$. Теперь из (5) получаем для $\forall u \in CS_{t_0}$, $y \in \partial V(u)$: $V(u) = (u, y) - V^*(y) \leqslant \delta_V(u) + \varepsilon$. Но $\delta_V \leqslant V$, и формула (1) доказана.

Автор выражает признательность Ю. Ф. Борисову и Г. Ш. Рубинштейну за ценные обсуждения теоремы 1 этой заметки.

Институт физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
12 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. T. Rockafellar, Trans. Am. Math. Soc., 123, № 1 (1966). [2] Л. С. Маергойз, Тез. докл. Всесоюзн. симпозиума по теории голоморфных функций многих комплексных переменных, Красноярск, 1969, стр. 27. [3] H. Busemann, G. Ewald, G. C. Shephard, Math. Annal., 151, № 1 (1963). [4] И. Я. Бакельман, Геометрические методы решения эллиптических уравнений, «Наука», 1964. [5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, УМН, 23, 6 (144) (1968). [6] A. Brøndsted, Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk., 34, 2 (1964). [7] V. Klee, Math. Scand., 8 (1960). [8] Г. Ш. Рубинштейн, УМН, 25, 5 (155) (1970). [9] Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, Теорема Хелли и ее применения, М., 1968. [10] Д. А. Райков, Векторные пространства, 1962. [11] J. J. Moreau, Bull. Soc. Math. France, 93 (1965). [12] А. Д. Александров, Уч. зап. Ленингр. унив., сер. матем., 6 (1939). [13] А. И. Перов, Укр. матем. журн., 18, № 3 (1960). [14] Ю. Г. Решетняк, Сибирск. матем. журн., 8, № 5 (1967).