Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

С. С. МАРЧЕНКОВ

О ПОЛУСТРУКТУРАХ ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 30 XI 1970)

В работах, посвященных изучению полуструктур вычислимых нумераций (см., например, ([1-5])), в основном, рассматривается построение минимальных или попарно не сравнимых нумераций с заданными свойствами. В частности, установлено ([3]), что верхняя полуструктура вычислимых нумераций системы $\mathfrak{F}$ всех рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств бесконечна и не является структурой. В настоящей заметке этот результат распространяется на более широкий класс систем (теоремы 1, 1а, примеры 1, 2). Предпринята попытка локального исследования полуструктур нумераций (теоремы 2 — 4). В дальнейшем, если не оговаривается противное, под системой мы понимаем вычислимую систему р.п. множеств, а под нумерацией — вычислимую нумерацию системы р.п. множеств.

Для любой системы S совокупность классов эквивалентных нумераций системы S образует относительно сводимости частично упорядоченное множество, которое мы обозначим через $L(S)$. Операция прямого сложения нумераций превращает $L(S)$ в верхнюю полуструктуру (см. ([2])).

Будем говорить, что множество P предельно для системы S, если любое конечное подмножество P содержится в некотором множестве из S.

Теорема 1. *Пусть система S содержит такое множество P, что подсистема $S \setminus \{P\}$ вычислима и P является предельным множеством для $S \setminus \{P\}$.*

Тогда полуструктура $L(S)$ бесконечна и не является структурой.

Аналогично теореме 1 доказывается теорема 1а, которая является ответом на один из вопросов Ершова ([1]).

Теорема 1а. *Если вычислимая система F общерекурсивных функций содержит предельную функцию, то полуструктура $L(F)$ бесконечна и не является структурой.*

Назовем систему множеств S дискретной, если любое множество P из S содержит такое конечное подмножество Q, что Q не содержится ни в одном из множеств системы S, отличном от P. Очевидно, никакая дискретная система не может содержать предельных множеств. Мы приводим два примера (вычислимых) дискретных систем, имеющих бесконечное число попарно не сравнимых однозначных нумераций. В частности, полуструктуры нумераций этих систем бесконечны и не являются структурами.

Пример 1. Пусть R — р.п. нерекурсивное непростое множество, $0 \in R$, $f(x)$ — общерекурсивный бесповторный пересчет R. Положим $P_k = \{f(0), \ldots, f(k-1), k\}$, $S = \{P_k \mid k \notin R\}$.

Разобьем множество $\{0, 1, 2, \ldots\}$ на систему бесконечных попарно не пересекающихся множеств E_i:

$$E_0 = \{0, 1, 3, 5, \ldots\}, \quad E_{i+1} = \{2^{i+1}(2k+1) \mid k = 0, 1, \ldots\},$$

$i = 0, 1, \ldots$ Обозначим через $\Phi_i(x)$ прямой пересчет множества E_i.

Пример 2. Пусть R — р.п. нерекурсивное множество. Положим $R_i = \{\Phi_i(x) \mid x \in R\}$, $R^* = \bigcup_{i \geq 0} R_i$, $S_0 = \{\{3x\} \mid x \notin R^*\}$, $S_1 = \{\{3x,$

$3x+1\} \mid x \in R^*\}$, $S_2 = \{\{3x, 3x+2\} \mid x \in R^*\}$ $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$.

Отправляясь от приведенных примеров, можно построить также примеры вычислимых дискретных систем общерекурсивных функций, обладающих бесконечным числом попарно не сравнимых однозначных нумераций.

Пусть α, β — нумерации системы S. Будем писать $\alpha \leqslant \beta$, если нумерация α сводится к нумерации β. Совокупность нумераций γ системы S, удовлетворяющих соотношению $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$, назовем интервалом, определенным нумерациями α, β, и обозначим через $\mathrm{In}(\alpha, \beta)$. Совокупность классов эквивалентных нумераций из $\mathrm{In}(\alpha, \beta)$ обозначим через $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$. Очевидно, если $\alpha \leqslant \beta$, то $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ — верхняя полуструктура.

Пусть a — рекурсивно перечислимая m-степень (т. е. класс m-эквивалентных р.п. множеств). Будем считать, что все рекурсивные множества образуют одну m-степень. Через L_a обозначим верхнюю полуструктуру р.п. m-степеней, не превосходящих a.

Если α — нумерация системы S и $T \subseteq S$, то через $\alpha^{-1}T$ обозначим совокупность α-номеров всех множеств из T. Если $T = \{P\}$, то вместо $\alpha^{-1}\{P\}$ пишем просто $\alpha^{-1}P$.

Теорема 2. *Пусть α — нумерация системы S и существуют такие р.п. множества P, Q, R, что $P, Q \in S$, $P \subset Q$, $\alpha^{-1}P \subseteq R$, $\alpha^{-1}Q \cap R = \phi$.*

Тогда для любой р.п. m-степени a найдется такая нумерация β системы S, что интервал $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ изоморфен полуструктуре L_a.

Следствие. *Для любой минимальной нумерации α системы $\mathfrak{F}$ и любой р.п. m-степени a найдется такая нумерация β системы $\mathfrak{F}$, что интервал $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ изоморфен полуструктуре L_a.*

Для любого р.п. множества Q через L_Q обозначим структуру всех р.п. подмножеств множества Q (включая пустое множество и само множество Q).

В следующей теореме при некотором обобщении условий теоремы 2 получен более слабый результат, нежели в теореме 2.

Теорема 3. *Пусть α — нумерация системы S и существуют р.п. множества P, R и α-вычислимая подсистема S_1 такие, что $P \in S$, $\alpha^{-1}P \subseteq R$, $S_1 \subseteq S \setminus \{P\}$, множество P является предельным множеством для системы S_1 и $\alpha^{-1}S_1 \cap R = \phi$.*

Тогда для любого конечного множества Q найдется такая нумерация β системы S, что интервал $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ изоморфен структуре L_Q.

Пусть S, T — системы. Будем говорить, что система T предельна для системы S, если любое множество из T является предельным множеством для системы S.

Следуя Янгу ([6]), назовем множество A точечно разложимым, если существует однозначная вычислимая нумерация α системы р.п. попарно не пересекающихся множеств такая, что $A \subseteq \bigcup_{n \geqslant 0} \alpha n$ и множество $A \cap \alpha n$ одноэлементно при любом $n \geqslant 0$.

Пусть P — р.п. множество. Через L_P обозначим систему всех р.п. надмножеств множества P. Система L_P частично упорядочена отношением нестрогого включения $\subseteq$. Любые два множества Q, R из L_P имеют в L_P наибольшую нижнюю грань — множество $Q \cap R$ — и наименьшую верхнюю грань — множество $Q \cup R$. Таким образом, L_P — структура. Будем писать $Q \infty R$, если множество $(Q \setminus R) \cup (R \setminus Q)$ конечно. Фактор-структуру структуры L_P по отношению ∞ обозначим через L_P^*. Вместо $L_\varnothing^*$ пишем просто L^*.

Теорема 4. *Пусть α — нумерация системы S.*

а) *Если для некоторой однозначно вычислимой подсистемы $T \subset S$ множество $\alpha^{-1}T$ просто, то найдется такая нумерация β системы S, что интервал $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ изоморфен структуре L^*.*

б) *Пусть для некоторой однозначно вычислимой подсистемы $T \subset S$ множество $\alpha^{-1}T$ рекурсивно перечислимо и существует такая α-вычислимая подсистема $U \subseteq S \setminus T$, что система T предельна для системы U.*

Тогда для любого простого множества P с точечно разложимым дополнением найдется такая нумерация β системы S, что интервал $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ изоморфен структуре L_P^*.

Следствие. *Какова бы ни была минимальная нумерация α системы $\mathfrak{F}$, либо существует нумерация β системы $\mathfrak{F}$ такая, что интервал* $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ *изоморфен структуре L^*, либо для всякого простого множества P с точечно разложимым дополнением существует нумерация β системы $\mathfrak{F}$, для которой интервал* $\mathrm{In}^*(\alpha, \beta)$ *изоморфен структуре L_P^*.*

Отметим, что для любого р.п. множества P с точечно разложимым дополнением структура L_P^* содержит подструктуру, изморфную структуре L^*.

Следствия из теорем 2, 4 показывают, что полуструктура $L(\mathfrak{F})$ в «окрестностях» минимальных нумераций имеет довольно сложное строение.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
30 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Л. Ершов, Сиб. матем. журн., 8, № 5 (1967). [2] Ю. Л. Ершов, Алгебра и логика, 7, № 5 (1968). [3] А. Б. Хуторецкий, Алгебра и логика, 8, № 2 (1969). [4] А. Б. Хуторецкий, Алгебра и логика, 8, № 4 (1969). [5] А. Б. Хуторецкий, Алгебра и логика, 8, № 6 (1969). [6] P. R. Young, J. Symb. Logic, 31, № 1 (1966).