Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 519.4 МАТЕМАТИКА

А. И. САКСОНОВ

О РАЗЛОЖЕНИИ ГРУПП ПОДСТАНОВОК НАД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 11 XI 1970)

Пусть G — конечная группа, R — произвольное коммутативное кольцо с 1. Представление группы G подстановками можно интерпретировать как R-представление, если переставляемые символы $s_1, \ldots, s_n$ объявить образующими свободного R-модуля L и превратить L в RG-модуль, распространив на него действие G по линейности. Понятно, что при изучении возникающих таким образом «подстановочных» RG-модулей достаточно ограничиться случаем, когда G действует на $s_1, \ldots, s_n$ транзитивно.

Пусть H — произвольная подгруппа группы G. Обозначим через $L(G, H, R)$ RG-модуль, в котором реализуется транзитивное представление группы G подстановками со стационарной подгруппой H. Общая проблема может быть сформулирована следующим образом: исследовать, как при фиксированном R строение RG-модуля $L(G, H, R)$ зависит от G и H. Одна из возникающих здесь задач состоит в изучении неразложимых компонент модуля $L(G, H, R)$.

В классическом случае комплексного или, более общо, нехарактеристического * поля F модуль $L(G, H, F)$ вполне приводим и дело сводится к определению его неприводимых компонент, их степеней, кратностей и т. д. (см., например, ([10])). С другой стороны, результат С. Д. Бермана ([1]) о неразложимости модуля $L(G, H, \mathbf{Z})$ переносится на произвольные области целостности R, в которых необратим каждый простой делитель числа $|G|$. Между тем, малоизученным остается случай, когда R является полным локальным кольцом, например, кольцом целых $\mathfrak{p}$-адических чисел или полем характеристики p. В этом случае имеющаяся информация сводится, в основном, к известным теоремам о прямых слагаемых и композиционных факторах регулярного модуля $L(G, E, R)$ (E — единичная подгруппа) ([2]), а также некоторым отдельным фактам типа леммы 2.3а работы ([4]) или «неопубликованной леммы Виланда» (см. ([5])). Лишь для весьма специальной ситуации получены более рафинированные результаты ([6]).

Цель данной заметки — анонсировать ряд необходимых и достаточных условий полной приводимости (транзитивной) группы подстановок конечной степени над произвольным характеристическим полем, т. е. условий полной приводимости RG-модуля $L(G, H, R)$ в случае, когда R — произвольное поле характеристики p, делящей $|G|$. Результаты, полученные при самых общих предположениях относительно G и H, затем специализируются дважды: сначала в качестве H берется p-силовская подгруппа, потом на G накладывается условие p-разрешимости. Попутно устанавливается следующий теоретико-групповой факт: число классов сопряженных p'-элементов произвольной конечной группы не превосходит числа ее двойных смежных классов по силовской p-подгруппе, причем равенство этих инвариантов возможно лишь для разрешимой группы.

Закономерности разложения модуля $L(G, H, R)$ зависят от расположения радикала в модулярной групповой алгебре RG. Эта связь становится более непосредственной, если в роли H выступает силовская p-подгруппа:

* Нехарактеристическим называют поле, характеристика которого не делит порядка группы.

при этом предположении полная приводимость модуля $L(G, H, R)$ эквивалентна совпадению радикала алгебры RG с пересечением ее левых идеалов, порожденных радикалами групповых алгебр силовских p-подгрупп *.

Переходя к формулированию результатов, предположим сначала, что R — произвольное коммутативное кольцо с 1 и обозначим через $\mathfrak{J}_H$ левый идеал кольца RG, порожденный фундаментальным идеалом кольца RH (H — подгруппа G). Два следующих утверждения очевидны.

Лемма 1. $L(G, H, R) \cong_{RG} RG / \mathfrak{J}_H$.

Лемма 2. $\mathfrak{D}_H \overset{\text{def}}{=} \bigcap\limits_{g \in G} \mathfrak{J}_{H^g}$ — *чистый R-подмодуль RG и является максимальным двусторонним идеалом кольца RG, содержащимся в $\mathfrak{J}_H$.*

Пусть теперь R — поле. Обозначим через $\operatorname{rad} RG$ радикал (возможно, нулевой) групповой алгебры RG.

Предложение 1. *Пусть G — конечная группа, H — ее произвольная подгруппа. Тогда эквивалентны условия:* a) *RG-модуль $L(G, H, R)$ вполне приводим*; b) $\operatorname{rad} RG \subseteq \mathfrak{J}_H$; c) $\operatorname{rad} RG \subseteq \mathfrak{D}_H$.

Если R_1 — расширение поля R, то условие b) предложения 1 выполняется или нет в кольцах RG и R_1G одновременно. Отсюда следует

Предложение 2. *RG-модуль $L(G, H, R)$ вполне приводим или нет одновременно для всех полей R данной характеристики.*

Если R — поле характеристики p, P — p-подгруппа группы G, то, как хорошо известно, $\mathfrak{D}_P$ — нильпотентный идеал в RG. Учитывая предложение 1, получаем

Следствие 1. *Пусть R — поле характеристики p, P — p-подгруппа G. RG-модуль $L(G, P, R)$ вполне приводим тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rad} RG = \mathfrak{D}_P$.

Имея ввиду получить критерии полной приводимости транзитивной группы подстановок над характеристическим полем, зафиксируем характеристику p основного поля. Предложение 2 снимает ограничения на выбор поля данной характеристики p, и, поскольку, как мы увидим ниже, результаты естественно формулируются для поля разложения группы G, оно фигурирует всюду в дальнейших рассмотрениях.

Введем необходимые обозначения. Пусть K — конечно-порожденное алгебраическое числовое поле, являющееся полем разложения для группы G, O — кольцо целых поля K, $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца O, содержащий p, $O_\mathfrak{p}$ — кольцо целых $\mathfrak{p}$-адического замыкания поля K, $\bar{K} = O / \mathfrak{p}$. $\bar{K}$ — поле разложения для группы G ([2]). Если M — некоторый KG-модуль, то через $\bar{M}$ обозначается соответствующий ему $\bar{K}G$-модуль. Напомним, что модуль $\bar{M}$ не определяется однозначно классом изоморфизма KG-модуля M, однако неприводимые факторы $\bar{M}$ определяются KG-модулем M однозначно ([2]). Далее, r_p обозначает число классов сопряженных p'-элементов группы G, η_j $(j = 1, \ldots, r_p)$ — характеры неразложимых компонент регулярного $O_\mathfrak{p} G$-модуля, u_j — степень характера η_j. $p(m)$ и $p'(m)$ — p-часть и p'-часть натурального числа m, т. е. соответственно наибольшая степень p, делящая m, и наибольший делитель m, взаимно простой с p; $p(|G|) = p^\gamma$. Через d_H обозначается число двойных смежных классов G по подгруппе H.

Теорема 1 (модульный критерий полной приводимости). *Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа, $L(G, H, K) = M_1 + \ldots + M_t$ — разложение KG-модуля $L(G, H, K)$ на неприводимые компоненты. Для полной приводимости $\bar{K}G$-модуля $L(G, H, \bar{K})$ необходимо и достаточно выполнение условий:* a) *все $\bar{M}_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ неприводимы*; b) $\bar{M}_i \cong \bar{M}_j \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow M_i \cong M_j$.

Теорема 2 (теоретико-характерный критерий полной приводимости). *Пусть G — конечная группа, H — ее подгруппа, π_H — характер KG-модуля $L(G, H, K)$.*

---

* Группы, у которых модулярная групповая алгебра обладает указанным свойством, изучались в ([7], [8], [3]).

Если G p-разрешима, то, как легко показать, характер KG-модуля $L(G, P, \bar{K})$ определяется таблицей (обыкновенных) характеров группы G. С другой стороны, согласно результату Суона ([9]), брауэровские характеры p-разрешимой группы и, следовательно, числа u_j также определяются этой таблицей. Таким образом, ввиду следствия 2 настоящей статьи, для p-разрешимой группы G свойство полной приводимости модуля $L(G, P, \bar{K})$ распознаваемо по таблице обыкновенных характеров G. К этому же заключению приводит

Т е о р е м а 5. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа.*

Тогда следующие условия эквивалентны:

a) *$\bar{K}G$-модуль $L(G, P, \bar{K})$ вполне приводим;*

b) *каждая компонента KG-модуля $L(G, P, K)$ содержится в нем с кратностью, равной p'-части ее K-размерности;*

c) *ограничение каждого неприводимого $\bar{K}G$-модуля Γ на силовской p-подгруппе группы G есть прямая сумма $p'(\dim_K \Gamma)$ «подстановочных» модулей размерности $p(\dim_K \Gamma)$.*

В доказательстве теоремы 5 используются факты, представляющие самостоятельный интерес.

Л е м м а 4. *Пусть P_0 — произвольная p-подгруппа G.*

Тогда для любого неприводимого KG-модуля M кратность, с которой он содержится в $L(G, P_0, K)$, не превосходит $p'(\dim_K M)\cdot p(|G : P_0|)$.

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть неприводимый KG-модуль M содержится в $L(G, P, K)$ с кратностью $p'(\dim_K M)$. Тогда $\bar{M}$ неприводим.*

В заключение рассмотрим группы p'-длины 1. К таковым относятся, в частности, сверхразрешимые группы и группы с инвариантным p-дополнением. Дескинс ([3]) предпринял попытку доказать, что для последних двух классов групп радикал модулярной групповой алгебры совпадает с пересечением ее левых идеалов, порожденных радикалами групповых алгебр силовских p-подгрупп (что, как указано выше, эквивалентно полной приводимости модуля $L(G, P, \bar{K})$). Известно, что это неверно для групп с инвариантным p-дополнением (контрпример при $p = 3$ доставляет расширение кватернионов с помощью автоморфизма 3-го порядка). Мы отмечаем здесь, что это неверно также и для сверхразрешимых групп. Контрпримером при $p = 2$ служит расширение неабелевой группы порядка 27 и экспоненты 3 с помощью четверной группы автоморфизмов: $G_{108} = \langle a, b, c, u, v \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1,\ a^{-1}b^{-1}ab = c,\ c^a = c^b = c,\ u^2 = v^2 = 1,\ uv = vu,\ a^u = a,\ b^u = b^2,\ a^v = a^2,\ b^v = b\rangle$. Для групп p'-длины 1 критерии полной приводимости модуля $L(G, P, \bar{K})$ устанавливает

Т е о р е м а 6. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа, обладающая инвариантным рядом $1 \subseteq P_1 \subseteq H \subseteq G$, где P_1 и G / H — p-группы, а H / P_1 — p'-группа. Тогда любое из условий* a), b), c) *теоремы 5 эквивалентно каждому из следующих:*

d) *число попарно неизоморфных компонент KG-модуля $L(G, P, K)$ равно r_p;*

e) *если p-подгруппа группы G / P_1 нормализует простую компоненту K-алгебры группы H / P_1, то она и централизует ее.*

Харьковский филиал
Института автоматики

Поступила
17 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Берман, ДАН, 157, № 3, 506 (1964). [2] C. W. Curtis, J. Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Assotiative Algebras, N.Y.— London, 1962. [3] W. E. Deskins, Pacific J. Math., 8, № 4, 693 (1958). [4] J. A. Green, Math. Zs., 79, № 2, 100 (1962). [5] B. Huppert, Math. Zs., 67, 479 (1957). [6] H. Kupisch, J. Algebra, 10, № 1, 1 (1968). [7] L. Lombardo-Radici, Rend. Sem. Mat. Roma, 3, 239 (1939). [8] L. L. Lombardo-Radici, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), 4, 53 (1948). [9] R. G. Swan, Topology, 2, № 2, 85 (1963). [10] H. Wielandt, Finite Permutation Groups, N. Y.— London, 1964.