Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 2

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

С. С. САННИКОВ

О ГРУППЕ 1-ЦЕПЕЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 22 IX 1970)

1. Постановка рассматриваемого здесь вопроса стимулирована одним замечанием акад. Н. Н. Боголюбова и И. Т. Тодорова относительно свойства многозначности функций на группе, связанных с представлениями группы вращений с комплексным спином ([1]). В общем случае вопрос ставится так: точными представлениями (в смысле ([2])) какой группы являются многозначные представления с комплексными весами односвязной (компактной или нет) группы Ли. Ответ состоит в следующем: многозначные представления являются точными представлениями некоторой новой группы — группы 1-цепей. Изучению этого объекта и посвящена настоящая заметка.

2. Обозначения. G — связная, односвязная топологическая группа, $g_2 \cdot g_1 = g_3$ — закон композиции в G $(g_i \in G)$, согласующийся с топологией в G, e — единица в G; $\gamma(t)$ — путь (или кривая) в G, $t \in I = [0, 1]$, т. е. непрерывное отображение $I \xrightarrow{\gamma} G$; $\gamma(0)$ — начало, $\gamma(1)$ — конец пути; $\gamma(t) = g$ — единичный путь, $\gamma(t)$ — петля (замкнутый путь), если $\gamma(0) = \gamma(1)$; $\Gamma(G)$ — множество путей, расположенных в G, $\Omega(G)$ — множество петель в G.

Основным объектом нашего рассмотрения является подмножество путей $\Gamma(G, e) \subset \Gamma(G)$, начинающихся в e, и его фактор-множества по некоторым отношениям эквивалентности*. $\Omega(G, e) \subset \Omega(G)$ — множество петель, начинающихся в e; $\gamma(t) = e$ — единичный путь $\in \Gamma(G, e)$. Отображение p: $\gamma(t) \to \gamma(1)$ осуществляет проекцию $\Gamma(G, e) \to G$.

3. Определение 1. Определим внутренний закон композиции в $\Gamma(G, e)$, положив для каждой пары $(\gamma_2, \gamma_1) \in \Gamma(G, e) \times \Gamma(G, e)$:

$$(\gamma_2, \gamma_1) \to \gamma_2 \circ \gamma_1 = (\gamma_2 \cdot g_1) \cdot \gamma_1 \in \Gamma(G, e), \tag{1}$$

где $g_1 = p(\gamma_1)$, $\gamma_2 \cdot g_1$ — правая трансляция γ_2 в G на g_1 (в общем случае $\gamma_2 \cdot g_1 \notin \Gamma(G, e)$), а

$$(\gamma_2 \cdot g_1) \cdot \gamma_1 = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2; \\ \gamma_2(2t-1) \cdot g_1, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Композиция (1) всюду определена в $\Gamma(G, e)$ и однозначна; будем называть ее законом композиции путей**.

Предложение 1. *Закон композиции* (1) *определяет в* $\Gamma(G, e)$ *структуру полугруппы с левым (правым) сокращением.* $\Omega(G, e) \subset \Gamma(G, e)$ *устойчиво относительно* (1).

Определим в $\Gamma(G)$ инволюцию s: $\gamma(t) \to \gamma_s(t) = s\gamma(t) = \gamma(1-t)$, $s^2 = 1$ (если $\Gamma(G, e) \ni \gamma \notin \Omega(G, e)$, то $\gamma_s \notin \Gamma(G, e)$).

---

* Предположение о существовании основного объекта, изучаемого здесь,— группы цепей $\bar{G}$ — было высказано в примечании к работе ([1]). Данный там ответ относится не к $\bar{G}$, а к некоторой римановой поверхности G^* (см. дальше). $\Gamma(G)$ удобно рассматривать еще как множество сечений расслоения $I \times G$.

** Точнее, правым законом композиции. Левый закон определяется формулой $\gamma_2 \Delta \gamma_1 = (g_1 \cdot \gamma_2) \cdot \gamma_1$. В общем случае $\gamma_2 \circ \gamma_1 \neq \gamma_2 \Delta \gamma_1$. Мы всюду используем правый закон.

Петлю вида

$$\gamma_s\cdot\gamma = \begin{cases} \gamma(2t), & 0 \leqslant t < {}^1/_2; \\ \gamma(2(1-t)), & {}^1/_2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

назовем **у с о м**. Всякий ус, начинающийся в e, можно представить в виде

$$\gamma_s\cdot\gamma = \gamma'\circ\gamma \quad (\gamma \in \Gamma(G, e)), \tag{2}$$

где $\gamma' = \gamma_s\cdot g^{-1} \in \Gamma(G, e)$, $g = p(\gamma)$. Обозначим через $\Omega_0(G, e) \subset \subset \Omega(G, e)$ — множество усов, выходящих из e.

4. Рассмотрим в $\Gamma(G)$ следующее отношение эквивалентности.

О п р е д е л е н и е 2. Пути γ_1 и γ_2 э к в и в а л е н т н ы, $\gamma_1 = \gamma_2 (\operatorname{mod} R_1)$, если как подмножества в G они совпадают и одинаково ориентированы. Подмножество, отвечающее классу $(\operatorname{mod} R_1)$, обозначим через $\tilde{g}$. (Ориентация пути $\gamma(t)$ снимается с ориентации $I \ni t$ посредством отображения γ.) Рефлексивность, симметричность и транзитивность этого отношения очевидны. Обозначим $\Gamma(G) / R_1 = P(G)$. Фактор-множество $\Gamma(G, e) / R_1$ обозначим через $P(G, e)$ и назовем **м н о ж е с т в о м 1-ц е п е й** в G, выходящих из e, или просто **ц е п е й**. $\Omega(G, e) / R_1 = C(G, e) \subset \subset P(G, e)$ — множество 1-циклов в e, или просто циклов. $\tilde{p}$: $P(G, e) \to \to G$ — каноническая проекция, $\tilde{p}(\tilde{g}) = g$ — конец цепи $\tilde{g}$.

Фактор-закон закона (1) по R_1 по-прежнему обозначим через $\circ$ и назовем законом композиции цепей.

П р е д л о ж е н и е 2. *Закон композиции цепей определяет в $P(G, e)$ структуру (ассоциативного) моноида с нейтральным элементом. $C(G, e)$ — подмоноид в $P(G, e)$* *.

Действительно, $\forall \tilde{g}_2, \tilde{g}_1 \in P(G, e)$ имеем

$$\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 = (\tilde{g}_2\cdot g_1)\tilde{g}_1 \in P(G, e). \tag{3}$$

Нейтральным элементом (единицей) в $P(G, e)$ служит цепь $\tilde{e} = e$. Действительно,

$$\tilde{g}\circ\tilde{e} = \tilde{e}\circ\tilde{g} = \tilde{g}. \tag{4}$$

Для установления ассоциативности нужна

Л е м м а (о факторизации). *Пусть $\gamma = \gamma_2\cdot\gamma_1$. Тогда*

$$\gamma\cdot g = (\gamma_2\cdot g)\cdot(\gamma_1\cdot g).$$

Действительно, из определения

$$\gamma_2\cdot\gamma_1 = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant {}^1/_2; \\ \gamma_2(2t-1), & {}^1/_2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

следует, что

$$\gamma(t)\cdot g = \begin{cases} \gamma_1(2t)\cdot g, & 0 \leqslant t \leqslant {}^1/_2; \\ \gamma_2(2t-1)\cdot g, & {}^1/_2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

т. е. $\gamma\cdot g = (\gamma_2\cdot g)\cdot(\gamma_1\cdot g)$.

При факторизации по R_1 эта лемма сохраняет силу. Теперь легко устанавливается, что

$$\tilde{g}_3 \circ (\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1) = (\tilde{g}_3 \circ \tilde{g}_2) \circ \tilde{g}_1. \tag{5}$$

То, что $C(G, e)$ — подмоноид в $P(G, e)$, очевидно.

Предложение 2 доказано.

5. Внесем в $P(G, e)$ топологию следующим образом.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть Σ_e — фундаментальная система окрестностей $U(e)$ элемента $e \in G$. Фундаментальную систему $\widetilde{\Sigma}_{\tilde{e}}$ окрестностей элемента $\tilde{e} \in P(G, e)$ определим как множество окрестностей $U^{\sim} =$

---

* Множество $P(G)$ превращается в свободный моноид цепей в G, если $\forall \tilde{g}_2, \tilde{g}_1 \in \in P(G)$ положить $\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1 = \tilde{g}_2\cdot\rho(\tilde{g}_2, g_1)\cdot\tilde{g}_1 \in P(G)$, где $\rho(\tilde{g}_2, \tilde{g}_1) = (\tilde{q}(\tilde{g}_2))^{-1}\cdot\tilde{p}(\tilde{g}_1)$, а $\tilde{q}(\tilde{g})$ — начало цепи $\tilde{g}$. Каждая единичная цепь $\tilde{g} = g$ является единицей в $P(G)$. Имеем $P(G) / G = P(G, e)$, где $P(G) \to P(G, e)$ задается формулой $\tilde{g} \to \tilde{g}\cdot(\tilde{q}(\tilde{g}))^{-1}$.

$=U(U(e))$, образованных цепями $\tilde{g}$, целиком лежащими в $U(e)$, т. е. $(CU(e)) \cap \tilde{g} = \phi$. Фундаментальную систему $\Sigma_{\tilde{g}}$ элемента $\tilde{g}$ зададим окрестностями $\tilde{U}_{\tilde{g}}$, образованными цепями, целиком лежащими в коридоре $\bigcup_{g \in \tilde{g}} (g \cdot U(e))$ и оканчивающимися в $\tilde{p}(\tilde{g}) \cdot U(e)$. Топологию в $P(G, e)$ определим с помощью окрестностей $\tilde{U}_{\tilde{g}}$ при любых $\tilde{g} \in P(G, e)$. Эта топология отделима.

П р е д л о ж е н и е 3. *Закон композиции $\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1$ согласован с топологией в $P(G, e)$ (определение 3), т. е. $P(G, e)$ — топологический моноид.*

6. Обозначим $\Omega_0(G, e) / R_1 = C_0(G, e) \subset C(G, e)$. Будем называть $C_0(G, e)$ множеством усов или предельных циклов. Рассмотрим в $P(G, e)$ следующее отношение эквивалентности.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\tilde{g}$ — цепь и $\tilde{g}_s = s\tilde{g}$ — обращенная цепь. Положим (ус) $\tilde{g}_s \cdot \tilde{g} = \tilde{e} \pmod{R_2}$ для любого $\tilde{g} \in P(G)$.

Рефлексивность, симметричность и транзитивность очевидны. Рассмотрим фактор-множества

$$P(G, e) / R_2 = \tilde{G}, \quad C(G, e) / R_2 = \tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} \subset \tilde{G}.$$

Т е о р е м а 1. *$\tilde{G}$ — топологическая группа, $\tilde{\Omega}$ — инвариантная подгруппа в $\tilde{G}$. Проекция $\tilde{p}$ осуществляет гомоморфизм $\tilde{G} \to G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фактор-закон (3) по R_2 по-прежнему будем обозначать через $\circ$. Относительно $\circ$ $\forall \tilde{g} \in \tilde{G}$ имеет единственный обратный (или симметричный), равный

$$\tilde{g}^{-1} = (s\tilde{g}) \cdot g^{-1} = \tilde{g}_s \cdot g^{-1} \in \tilde{G}, \; g = \tilde{p}(\tilde{g}). \tag{6}$$

Закон $\circ$ ассоциативен. Поэтому $\tilde{G}$ — группа. Фактор-топология в $\tilde{G}$ отделима, так как $C_0(G, e)$ замкнуто в $P(G, e)$ и $P(G, e)$ насыщено относительно $C_0(G, e)$. Групповая структура в $\tilde{G}$ согласована с фактор-топологией в $\tilde{G}$. Действительно, легко проверить, что для всякой окрестности $\tilde{U}_{\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1^{-1}}$ найдутся окрестности $\tilde{U}_{\tilde{g}_2}$ и $\tilde{U}_{\tilde{g}_1}$ такие, что $\tilde{U}_{\tilde{g}_2} \circ \tilde{U}_{\tilde{g}_1}^{-1} \subset \tilde{U}_{\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1^{-1}}$ ($\tilde{U}_{\tilde{g}}^{-1}$ образована цепями, симметричными цепям из $\tilde{U}_{\tilde{g}}$). Таким образом $\tilde{G}$ — топологическая группа. $\tilde{G}$ — однородное пространство: $\forall \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{G}$ уравнение $\tilde{g}_1 = \tilde{g} \circ \tilde{g}_2$ имеет единственное решение $\tilde{g} = (\tilde{g}_1 \cdot g_2^{-1}) \cdot (s\tilde{g}_2 \cdot g_2^{-1}) \in \tilde{G}$. $\tilde{G}$ связна и стягиваема. Имеем изоморфизм $\tilde{G} \approx P(G, e) / C_0(G, e)$. Далее, для любого $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ и любого $\tilde{g} \in \tilde{G}$ имеем

$$\tilde{g} \circ \tilde{\omega} \circ \tilde{g}^{-1} \in \tilde{\Omega}, \tag{7}$$

т. е. $\tilde{\Omega}$ — инвариантная подгруппа в $\tilde{G}$. $\tilde{\Omega}$ не является центром в $\tilde{G}$, так как в общем случае

$$\tilde{\omega} \circ \tilde{g} \circ \tilde{\omega}^{-1} = \tilde{g}. \tag{8}$$

$\tilde{G}$ будем называть группой цепей над группой G, $\tilde{\Omega}$ — группой циклов *. Очевидно, что в рассматриваемой топологии $\tilde{G}$ и $\tilde{\Omega}$ — некомпактные группы: $\tilde{\Omega}$, вообще говоря, не коммутативна. $\tilde{\Omega}$ связна, если G односвязна. Если G — односвязная группа Ли, то Ω односвязна.

Рассмотрим фактор-группу $\tilde{G} / \tilde{\Omega}$. $\tilde{\Omega}$ — ядро канонического отображения $\tilde{G} \to \tilde{G} / \tilde{\Omega}$: $\tilde{g} \to$ класс $\pmod{R_3}$ гомотопий в G. Отношение эквивалентности R_3 согласуется с композицией в $\tilde{G}$ ($\tilde{\Omega}$ — инвариантная подгруппа). R_3 задается проекцией $\tilde{p}$: $\tilde{g} \to g$ — конец $\tilde{g}$. Имеем $\tilde{p}(\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1) =$

---

* Пусть G — группа Ли. Тот факт, что очень широкий класс представлений группы $\tilde{G}$ порождается надлежащими представлениями алгебры Ли группы G, находил бы естественное объяснение при наличии локального изоморфизма между G и $\tilde{G}$ (тогда локально $\tilde{G}$ — многообразие, а в целом, конечно, нет). Все это связано с идеей дискретности пространства $\tilde{G}$ в малом, в общем виде восходящей к Риману.

$= g_2g_1$, $\tilde{p}(\tilde{g}_i) = g_i$, поэтому

$$\tilde{p}(\tilde{g}_2 \circ \tilde{g}_1) = \tilde{p}(\tilde{g}_2) \cdot \tilde{p}(\tilde{g}_1), \tag{9}$$

т. е. $\tilde{p}$ осуществляет гомоморфизм $\tilde{G} \to G$. По теореме о гомоморфизмах группы $\tilde{G} / \tilde{\Omega}$ и G изоморфны. Теорема доказана.

Заметим, что последовательность $e \to \tilde{\Omega} \to \tilde{G} \to G \to e$ точна.

Группа $\tilde{G}$ является главным нелокально тривиальным расслоенным пространством с базой G и слоем (он же структурная группа) $\tilde{\Omega} = \tilde{p}^{-1}(e)$: $\tilde{G} = (\tilde{G}; \tilde{p}, G, \tilde{\Omega})$. Слоем $\tilde{p}^{-1}(g)$ над g является множество цепей, оканчивающихся в g, при этом $\tilde{p}^{-1}(g_2) \circ \tilde{p}^{-1}(g_1) \subseteq \tilde{p}^{-1}(g_2 \cdot g_1)$. Для любого $g \in G$ слой $\tilde{p}^{-1}(g)$ гомеоморфен слою $\tilde{p}^{-1}(e) = \tilde{\Omega}$: $\tilde{p}^{-1}(g) = \Omega \circ \tilde{g}$, $\tilde{p}(\tilde{g}) = g$, но не изоморфен ему как алгебраическая структура ($\tilde{\Omega}$ — группа, $\tilde{p}^{-1}(g)$, $g \neq e$ — нет). $\bigcup_{g \in G} \tilde{p}^{-1}(g) = \tilde{G}$. $\tilde{G}$ универсально для $\tilde{\Omega}$, G — классифицирующее пространство.

7. Представляют интерес главные расслоения $G^* = (G^*, p^*, G, M)$ над G со слоем $M = p^{*-1}(g) = \tilde{p}^{-1}(g) / R_k(g)$, где $R_k(g)$ задает некоторое отношение эквивалентности такое, что $G^* = \tilde{G} / \bigcup_G R_k(g)$ — пучок над G. Если G^* регулярно, то $p^{*-1}(g)$ — группа монодромии, изоморфная некоторой фактор-группе фундаментальной группы $\pi^1(G \setminus D)$ многообразия $G \setminus D$, где D — надлежащий дивизор на G. G^* — это римановы поверхности, изучавшиеся в [2]. Сечения G^* — листы римановой поверхности.

8. Пусть теперь G — связная, но не односвязная группа, π^1 — ее фундаментальная группа, $\bar{G}$ — универсальное накрытие G и ω: $\bar{G} \to G$ — гомоморфизм ($G \approx \bar{G} / Z$, $Z \approx \pi^{-1}$). G — группа цепей над G, $\tilde{p}$: $\tilde{G} \to \bar{G}$ ($\tilde{\Omega}$ не связна). Имеет место следующая (коммутативная диаграмма)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\bar{G}} & \xrightarrow{\tilde{\bar{\omega}}} & \tilde{G} \\ {\scriptstyle \tilde{\bar{p}}}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \sigma} & \downarrow{\scriptstyle \tilde{p}} \\ \bar{G} & \xrightarrow[\omega]{} & G \end{array}$$

$\bar{\omega}$ — изоморфизм, σ ставит в соответствие цепи в G класс гомотопий в $\bar{G}$. $G \approx \tilde{\bar{G}} / \tilde{Z}$, где $\tilde{Z} \approx \tilde{\Omega}$ ($\tilde{\Omega} / \tilde{\bar{\Omega}} \approx \pi^1$) — подгруппа цепей, оканчивающихся на элементах из Z. $\tilde{Z}$ назовем расслоением группы Z. Теперь ясно, что если представление G зависит от цепей на G (например, многозначное представление [1]), то она является представлением группы $\tilde{G}$.

9. По аналогии с группой 1-цепей $\tilde{G} = G^{(1)}$ можно определить также группы n-цепей $G^{(n)}$ над $G = G^{(0)}$ как группы 1-цепей над $G^{(n-1)}$.

Выражаю признательность А. А. Кириллову и И. Т. Тодорову за обсуждение работы и замечания.

Поступило
7 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Санников, ДАН, 176, 801 (1967). [2] С. С. Санников, О римановых поверхностях аналитических групп и пространствах функций на них, Препринт ИТФ, 67—35, Киев, 1967.