Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 539.30 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Т. В. МЕУНАРГИЯ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНКЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 2 XII 1970)

Целью настоящей работы является применение теории, развитой И. Н. Векуа ([1]), к задачам распределения напряжений около отверстий для тонких пологих оболочек. Рассматривается задача концентрации моментов возле кругового отверстия при цилиндрическом изгибе пластинки переменной толщины в предположении, что контур отверстия свободен от внешней нагрузки.

Уравнение изгиба пластинки переменной толщины в случае приближения порядка $N=1$ в комплексной форме имеет вид ([1])

$$4\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial V_+}{\partial\bar z}\right)+2(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial\bar z}(h^3\rho)-2\mu h\frac{\partial u}{\partial\bar z}-3\mu hV_+=0,$$

$$2\mu\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(h\frac{\partial U}{\partial\bar z}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar z}\left(h\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right)+3\mu\left(\frac{\partial hV_+}{\partial z}+\frac{\partial h\bar V_+}{\partial\bar z}\right)=0, \tag{1}$$

$$V_+=V_x+iV_y,\quad \rho=\frac{\partial V_+}{\partial z}+\frac{\partial\bar V_+}{\partial\bar z},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

где x и y — декартовы координаты точки срединной плоскости, $2h(x, y)$ — толщина пластинки, U — нормальный прогиб срединной плоскости, tV_x и tV_y — касательные смещения на плоскости, параллельной срединной и отстоящей от нее на расстояние t $(-h\leqslant t\leqslant h)$.

Изгибающие и крутящие моменты и перерезывающие силы определяются по формулам

$$M_{xy}-M_{yx}-2iM_{xx}=4\mu h^3\frac{\partial V_+}{\partial\bar z},$$

$$M_{xy}+M_{yx}=2(\lambda+\mu)h^3\rho, \tag{2}$$

$$T_x-iT_y=T_+=2\mu h\frac{\partial U}{\partial\bar z}+3\mu hV_+,$$

где $M_{xy}(M_{yx})$, $M_{xx}(M_{yy})$ и $T_x(T_y)$ являются изгибающим моментом, крутящим моментом и перерезывающей силой соответственно, которые действуют на площадку, нормальную к оси Ox (Oy).

Пусть бесконечная пластинка ослаблена круговым отверстием радиуса R. Предположим, что на границе отверстия и на бесконечности выполняются условия

$$M_{r\vartheta}+iM_{rr}=0,\quad T_{(r)}=0\quad \text{при}\ |z|=R; \tag{3}$$

$$M_{xy}^{(\infty)}=M,\quad M_{yx}^{(\infty)}=T_x^{(\infty)}=0,\quad M=\text{const}; \tag{4}$$

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta.$$

Пусть толщина пластинки изменяется по закону

$$h=h_*(1+\varepsilon H),$$

где

$$H = -1 + 2R^2/r^2, \quad \varepsilon = (h_0 - h_1)/(h_0 + h_1), \quad h_* = {}^1/_2(h_0 + h_1).$$

Тогда $h(R) = h_0 = \mathrm{const}$, $t(\infty) = h_1 = \mathrm{const}$; ε является малым параметром; $R \leqslant r < \infty$.

Представим перемещения V_+ и U в виде рядов по степеням ε:

$$V_+ = \sum^{\infty} \overset{(n)}{V}_+ \varepsilon^n, \quad U = \sum_{n=0}^{\infty} \overset{(n)}{U} \varepsilon^n. \tag{5}$$

Если подставить разложения (5) в (1) и приравнять члены при одинаковых степенях ε, то для приближений порядка n получится система уравнений

$$\mu h_*^2 \Delta \overset{(n)}{V}_+ + 2(\lambda + \mu) h_*^2 \frac{\partial \overset{(n)}{\rho}}{\partial \bar{z}} - 2\mu \frac{\partial \overset{(n)}{U}}{\partial \bar{z}} - 3\mu \overset{(n)}{V}_+ = -4\mu h_*^2 \Big(3H \frac{\partial \overset{(n-1)}{V}_+}{\partial \bar{z}} +$$

$$+ 3H^2 \frac{\partial \overset{(n-2)}{V}_+}{\partial \bar{z}} + H^3 \frac{\partial \overset{(n-3)}{V}_+}{\partial \bar{z}}\Big) - 2(\lambda + \mu) h_*^2 (3H \overset{(n-1)}{\rho} + 3H^2 \overset{(n-2)}{\rho} + H^3 \overset{(n-3)}{\rho}) +$$

$$+ 2\mu H \frac{\partial \overset{(n-1)}{U}}{\partial \bar{z}} + 3\mu H \overset{(n-1)}{V}_+, \tag{6}$$

$$\mu \Delta \overset{(n)}{U} + 3\mu \overset{(n)}{\rho} = -2\mu \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(H \frac{\partial \overset{(n-1)}{U}}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(H \frac{\partial \overset{(n-1)}{U}}{\partial z}\right)\right) -$$

$$-3\mu \left(\frac{\partial H \overset{(n-1)}{V}_+}{\partial z} + \frac{\partial H \overset{(n-1)}{V}_+}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$n = 0, 1, \ldots$$

Таким образом, задача сводится к последовательному решению неоднородной системы (6) равновесия пластинки постоянной толщины при $n = 0, 1, \ldots$, причем считаем, что $\overset{(k)}{V}_+ = \overset{(k)}{U} = 0$, если $k < 0$.

Для нулевых приближений имеем систему уравнений равновесия пластинки постоянной толщины h_*

$$\mu h_*^2 \Delta \overset{(0)}{V}_+ + 2(\lambda + \mu) h_*^2 \frac{\partial \overset{(0)}{\rho}}{\partial \bar{z}} - 2\mu \frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial \bar{z}} - 3\mu \overset{(0)}{V}_+ = 0, \tag{7}$$

$$\mu \Delta \overset{(0)}{U} + 3\mu \overset{(0)}{\rho} = 0.$$

Решая систему (7) с учетом граничных условий (3) и (4), для коэффициента концентрации можно вывести формулу

$$\overset{(0)}{K} = \frac{M_{ax} \overset{(0)}{M}_{\varphi r}}{M} = \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^3 \left(1 + \frac{2K_2(\beta R)}{K_2(\beta R) + 2(1 - \nu) K_0(\beta R)}\right), \tag{8}$$

где K_n — модифицированные функции Бесселя II рода, ν — коэффициент Пуассона, $\beta^2 = 3/h_*^2$. В случае $h_0 = h_1$ эта формула имеется у И. Ю. Хома ([3]).

Для первого приближения имеем систему уравнений

$$\mu h_*^2 \Delta \overset{(1)}{V}_+ + 2(\lambda + \mu) h_*^2 \frac{\partial \overset{(1)}{\rho}}{\partial \bar{z}} - 2\mu \frac{\partial \overset{(1)}{U}}{\partial \bar{z}} - 3\mu \overset{(1)}{V}_+ = -12\mu h_*^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(H \frac{\partial \overset{(0)}{V}_+}{\partial \bar{z}}\right) -$$

$$-6(\lambda + \mu) h_*^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (H \overset{(0)}{\rho}) + 2\mu H \frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial \bar{z}} + 3\mu H \overset{(0)}{V}_+, \tag{9}$$

$$\mu \Delta \overset{(1)}{U} + 3\mu \overset{(1)}{\rho} = -2\mu \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(H \frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial \bar{z}}\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(H \frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial z}\right)\right) - 3\mu \left(\frac{\partial H \overset{(0)}{V}_+}{\partial z} + \frac{\partial H \overset{(0)}{V}_+}{\partial \bar{z}}\right)$$

с граничными условиями (3) и (4) при $M = 0$.

Общее решение системы (9) имеет вид

$$\overset{(1)}{V}_{+} = \overset{(10)}{V}_{+} + \hat{V}_{+}, \quad \overset{(1)}{U} = \overset{(10)}{U} + \hat{U}, \tag{10}$$

где $\overset{(10)}{V}_{+}$, $\overset{(10)}{U}$ — общее решение соответствующей однородной системы (9), $\hat{V}_{+}$, $\hat{U}$ — частные решения уравнений (9) такие, что

$$2\mu \frac{\partial \hat{U}}{\partial \bar{z}} + 3\mu \hat{V}_{+} = -2\mu H \frac{\partial \overset{(0)}{U}}{\partial \bar{z}} - 3\mu H \overset{(0)}{V}_{+}. \tag{11}$$

Тогда последнее уравнение (9) явно выполняется. Подставим (11) в первое уравнение (9), получим

$$\hat{V}_{+} = 3\overset{(0)}{V}_{+} + W, \quad \text{т. е. } \overset{(1)}{V}_{+} = \overset{(10)}{V}_{+} + 3\overset{(0)}{V}_{+} + W,$$

где W — любое решение неоднородной системы уравнений плоской теории упругости вида

$$\mu \Delta W + 2(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{z}} = -24\mu R^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z\bar{z}} \frac{\partial \overset{(0)}{V}_{+}}{\partial z}\right) - 12(\lambda + \mu) R^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z\bar{z}} \overset{(0)}{\rho}\right),$$
$$\Theta = \partial W / \partial z + \partial \overline{W} / \partial \bar{z}, \tag{12}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$(\lambda + \mu)\Theta + 2\mu \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} e^{2i\theta} = 0 \quad \text{при } |z| = R; \tag{13}$$

$$\Theta^{(\infty)} = (\partial W / \partial \bar{z})^{(\infty)} = 0 \text{ на бесконечности.} \tag{14}$$

Из граничных условий (3) и (4) получим, что

$$\overset{(10)}{V}_{+} = -3\overset{(0)}{V}_{+}, \quad \overset{(10)}{U} = -3\overset{(0)}{U}.$$

Поэтому изгибающие и крутящие моменты, соответствующие первому приближению, будут выражаться через W в виде [2]

$$\overset{(1)}{M}_{xy} + \overset{(1)}{M}_{yx} = 2(\lambda + \mu) h^3 \Theta = h^3 \operatorname{Re}\left(\frac{2}{\varkappa + 1} \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{F(\xi, \eta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta + 4\Phi(z)\right); \tag{15}$$

$$\overset{(1)}{M}_{xy} - \overset{(1)}{M}_{yx} - 2i\overset{(1)}{M}_{xx} = 4\mu h^3 \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = h^3 \Big(-2\left(z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\right) +$$
$$+ \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \frac{1}{\pi} \iint_S \frac{F(\xi, \eta)}{\zeta - z} d\xi\, d\eta + \frac{1}{\varkappa + 1} \frac{1}{\pi} \iint_S \overline{F(\xi, \eta)} \frac{\zeta - z}{(\bar{\zeta} - \bar{z})^2} d\xi\, d\eta\Big), \tag{16}$$

где

$$F(\xi, \eta) = 24\mu R^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\zeta\bar{\zeta}} \frac{\partial \overset{(0)}{V}_{+}}{\partial \zeta}\right) + 12(\lambda + \mu) R^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}\left(\frac{1}{\zeta\bar{\zeta}} \overset{(0)}{\rho}\right), \tag{17}$$
$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \varkappa = 3 - 4\nu.$$

Решая систему (12) с учетом граничных условий (13) и (14), для комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ получим

$$\Phi(z) = \frac{R^2}{\varkappa + 1} \frac{1}{2\pi} \iint_S \left(F(\xi, \eta) \frac{\varkappa}{z(R^2 - \bar{\zeta} z)} - \overline{F(\xi, \eta)} \frac{\zeta\bar{\zeta} - R^2}{\bar{\zeta}(R^2 - \bar{\zeta} z)^2}\right) d\xi\, d\eta, \tag{18}$$

$$\Psi(z) = \frac{R^2}{\varkappa + 1} \frac{1}{2\pi} \Big\{\iint_S F(\xi, \eta) \left(\frac{1}{\zeta z^2} + \varkappa R^2 \frac{2R^2 - 3z\bar{\zeta}}{z^3 (R^2 - \bar{\zeta} z)^2}\right) d\xi\, d\eta -$$
$$- \iint_S \overline{F(\xi, \eta)} \left(\frac{1}{z(R^2 - \bar{\zeta} z)} + R^2 \frac{(\zeta\bar{\zeta} - R^2)(R^2 - 3\bar{\zeta} z)}{z^2 \bar{\zeta}(R^2 - \bar{\zeta} z)^3}\right) d\xi\, d\eta\Big\}. \tag{19}$$

Ограничиваясь первым приближением, согласно формулам (10) и (18), найдем выражение для коэффициента концентрации в виде

$$K\left(\frac{R}{h_*}\right)=\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^3\left(\frac{3K_2(\beta R)+2(1-\nu)K_0(\beta R)}{K_2(\beta R)+2(1-\nu)K_0(\beta R)}-\varepsilon\frac{12K_2(\beta R)+3K_0(\beta R)+3K_4(\beta R)}{K_2(\beta R)+2(1-\nu)K_0(\beta R)}+\right.$$
$$\left.+\varepsilon\frac{24R^4}{K_2(\beta R)+2(1-\nu)K_0(\beta R)}\int_R^\infty\left(\frac{K_4(\beta\rho)}{\rho^5}+\frac{K_3(\beta\rho)}{\rho^3}\right)d\rho\right). \qquad (20)$$

Можно показать, что

$$K(\infty)=\lim_{(R/h_*)\to\infty}K=\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^3\left(\frac{5-2\nu}{3-2\nu}-\varepsilon\frac{6}{3-2\nu}\right),\quad K(0)=\lim_{(R/h_*)\to 0}K=$$
$$=\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^3(3-6\varepsilon). \qquad (21)$$

Решая эту же задачу при помощи классических уравнений ([5]), для коэффициента концентрации получим формулу

$$K=\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^3\left(\frac{5+3\nu}{3+\nu}-\varepsilon\,\frac{5+3\nu}{3+\nu}\,\frac{3(1+\nu)}{3+\nu}\right). \qquad (22)$$

Таким образом, в отличие от классического случая коэффициент концентрации зависит кроме упругой постоянной ν также от параметра $\beta R=\sqrt{3}R/h_*$, где R — радиус отверстия, $h_*=\frac{1}{2}(h_0+h_1)$, причем он практически совпадает с классическим выражением (22) только для больших значений (R/h_*).

Институт прикладной математики
Тбилисского государственного университета

Поступило
13 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, Теория тонких пологих оболочек переменной толщины, 1966. [2] И. Н. Векуа, Н. И. Мусхелишвили, Тр. Всесоюзн. съезда по теоретической и прикладной механике, Изд. АН СССР, 1962. [3] И. Ю. Хома, Прикл. мех., 3, в. 11, 37 (1967). [4] Г. Н. Савин, Концентрация напряжений около отверстий, М., 1951. [5] С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, Пластинки и оболочки, «Наука», 1966.