Проблемы физики, математики и техники, № 3 (40), 2019

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Я.Т. Мегралиев, У.С. Ализаде

Бакинский государственный университет

ON THE PROBLEM OF IDENTIFYING A LINEAR SOURCE FOR THE THIRD-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH INTEGRAL CONDITION

Ya.T. Mehraliev, U.S. Alizade

Baku State University

Исследована задача идентификации линейного источника для одного уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с интегральным условием первого рода. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной в определенном смысле задаче. С помощью метода Фурье эквивалентная задача сводится к решению системы интегральных уравнений. С помощью метода сжатых отображений доказываются существование и единственность решения системы интегральных уравнений, которая также является единственным решением эквивалентной задачи. Пользуясь эквивалентностью, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: *обратная задача*, *уравнения третьего порядка*, *метод Фурье*, *классическое решение.*

The identification of a linear source for the third-order single equation that describes the propagation of longitudinal waves in a dispersive medium with an integral condition of the first kind is investigated. At first, the original problem reduces to an equivalent problem in a certain sense. Using the Fourier method, the equivalent problem is reduced to solving a system of integral equations. With the help of the method of compressed mappings, the existence and uniqueness of the solution of a system of integral equations, which is also the only solution to an equivalent problem, are proved. Using equivalence, it is possible to prove the existence and uniqueness of the classical solution of the original problem.

Keywords: *inverse problem*, *third-order equations*, *Fourier method*, *classical solution.*

Введение

Потребности практики часто приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциальных уравнений по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. В последнее время обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений представляет собой активно развивающееся направление современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах (см., например [1]–[8]).

В последние годы возрос интерес к изучению волновых процессов в средах, характеризующихся наличием дисперсии и поглощения. Различные задачи для уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде исследовались в [9]–[11].

В данной работе, следуя [12], [13], доказаны существование и единственность решения обратной задачи для одного уравнения третьего порядка, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде с дополнительным интегральным условием первого рода.

1 Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения [11]

$$u_{ttt}(x,t)-u_{txx}(x,t)+u_{tt}(x,t)-\alpha u_{xx}(x,t)= \\ =a(t)u(x,t)+f(x,t) \quad (1.1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1,\quad 0\le t\le T\}$, обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_t(x,0)=\varphi_1(x), \\ u_{tt}(x,0)=\varphi_2(x)\ \ (0\le x\le 1), \quad (1.2)$$

граничным условием Неймана

$$u_x(0,t)=0\ \ (0\le t\le T) \quad (1.3)$$

интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T), \quad (1.4)$$

и с дополнительным условием

$$u(0,t)=h(t)\ \ (0\le t\le T), \qquad (1.5)$$

где $\alpha(0<\alpha<1)$ – заданное число, $f(x,t)$, $\varphi_i(x)$ $(i=\overline{0,2})$, $h(t)$ – заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ – искомые функции.

Определение. Классическим решением задачи (1.1)–(1.5) назовём пару функций $\{u(x,t),a(t)\}$, обладающих следующими свойствами:

1) функция $u(x,t)$ и ее производные $u_t(x,t)$, $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttt}(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{tx}(x,t)$, $u_{txx}(x,t)$ непрерывны в D_T;

2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

3) уравнения (1.1) и условия (1.2)–(1.5) удовлетворяются в обычном смысле.

Справедлива следующая

***Лемма* 1.1.** Пусть $f(x,t)\in C(D_T)$,

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T),$$

$\varphi_0(x)\in C^1[0,1]$, $\varphi_0(1)=0$, $\varphi_i(x)\in C[0,1]$ $(i=\overline{1,2})$, $h(t)\in C^3[0,T]$, $h(t)\ne 0$ $(0\le t\le T)$ и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 \varphi_i(x)dx=0\ \ (i=\overline{0,2}),$$

$$\varphi_0(0)=h(0),\ \varphi_1(0)=h'(0),\ \varphi_2(0)=h''(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1.1)–(1.5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1.1)–(1.5), из соотношений (1.1)–(1.3),

$$u_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T), \qquad (1.6)$$

$$\begin{gathered} h'''(t)+h''(t)-u_{txx}(0,t)-\alpha u_{xx}(0,t)= \\ =a(t)h(t)+f(0,t)\ \ (0\le t\le T). \end{gathered} \qquad (1.7)$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.5). Интегрируя уравнение (1.1) по *x* от 0 до 1, имеем:

$$\begin{gathered} \frac{d^3}{dt^3}\int_0^1 u(x,t)dx-u_{tx}(1,t)+u_{tx}(0,t)+\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx- \\ -\alpha(u_x(1,t)-u_x(0,t))= \\ =a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx\ \ (0\le t\le T). \end{gathered} \qquad (1.8)$$

Учитывая, что выполняются условия леммы $\int_0^1 f(x,t)dx=0$ $(0\le t\le T)$ и $\varphi_0(1)=0$, с учётом (1.3), (1.4), находим:

$$u_{tx}(1,t)+\alpha u_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T),$$

$$u_x(1,0)=\varphi_0(1)=0.$$

Отсюда легко приходим к выполнению (1.6).

Далее, считая $h(t)\in C^3[0,T]$ и дифференцируя (1.5), получаем:

$$\begin{gathered} u_t(0,t)=h'(t),\ u_{tt}(0,t)=h''(t), \\ u_{ttt}(0,t)=h'''(t)\ \ (0\le t\le T). \end{gathered} \qquad (1.9)$$

Подставляя $x=0$ в уравнение (1.1), находим:

$$\begin{gathered} u_{ttt}(0,t)-u_{txx}(0,t)+u_{tt}(x,t)-\alpha u_{xx}(0,t)= \\ =a(t)u(0,t)+f(0,t). \end{gathered} \qquad (1.10)$$

А отсюда, с учётом (1.5) и (1.9), следует выполнение (1.7). Теперь предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7). Тогда из (1.8), с учётом (1.3), (1.6) и

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0\ \ (0\le t\le T),$$

находим:

$$\begin{gathered} \frac{d^3}{dt^3}\int_0^1 u(x,t)dx+\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx= \\ =a(t)\int_0^1 u(x,t)dx\ \ (0\le t\le T). \end{gathered} \qquad (1.11)$$

В силу (1.2) и выполнения условия

$$\int_0^1 \varphi_i(x)dx=0\ \ (i=\overline{0,2}),$$

очевидно, что

$$\begin{cases} \int_0^1 u(x,t)dx=\int_0^1\varphi_0(x)dx=0, \\ \frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)dx=\int_0^1\varphi_1(x)dx=0, \\ \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx=\int_0^1\varphi_2(x)dx=0. \end{cases} \qquad (1.12)$$

Из (1.11), с учётом (1.12), легко приходим к выполнению (1.4).

Далее, из (1.7) и (1.10), получаем:

$$\begin{gathered} \frac{d^3}{dt^3}(u(0,t)-h(t))+\frac{d^2}{dt^2}(u(0,t)-h(t))= \\ =a(t)(u(0,t)-h(t))\ \ (0\le t\le T). \end{gathered} \qquad (1.13)$$

Так как

$$\varphi_0(0)=h(0),\ \varphi_1(0)=h'(0),\ \varphi_2(0)=h''(0),$$

имеем:

$$\begin{cases} u(0,0)-h(0)=\varphi_0(0)-h(0)=0, \\ u_t(0,0)-h'(0)=\varphi_1(0)-h'(0)=0, \\ u_{tt}(0,0)-h''(0)=\varphi_2(0)-h''(0)=0. \end{cases} \qquad (1.14)$$

Из (1.13), с учётом (1.14), ясно, что выполняется и условие (1.5). □

2 Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) будем искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x\ \ (\lambda_k=k\pi), \qquad (2.1)$$

где

$$u_k(t)=l_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\ \ (k=0,1,...),$$

причём

$$l_k=\begin{cases}1, \text{ при } k=0,\\ 2, \text{ при } k=1,2,\dots .\end{cases}$$

$$\begin{gathered}u_k'''(t)+u_k''(t)+\lambda_k^2u_k'(t)+\alpha\lambda_k^2u_k(t)=\\ =F_k(t;u,a)\ \ (k=0,1,2,\dots),\end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}u_k(0)=\varphi_{0k},\ u_k'(0)=\varphi_{1k},\\ u_k''(0)=\varphi_{2k}\ \ (k=0,1,2,\dots),\end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t),$$

$$f_k(t)=l_k\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\varphi_{ik}=l_k\int_0^1\varphi_i(x)\cos\lambda_k xdx\ \ (i=\overline{0,2};\ k=0,1,2,\dots).$$

Решая задачу (2.2), (2.3), находим:

$$\begin{gathered}u_0(t)=\varphi_{00}+t\varphi_{10}+(t-1+e^{-t})\varphi_{20}+\\ +\int_0^t F_0(\tau;u,a)(e^{-(t-\tau)}+t-\tau-1)d\tau,\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}u_k(t)=\frac{1}{b_k}\Bigg\{\Bigg[\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+\\ +\alpha_k e^{\gamma_k t}\Bigg[\left(\alpha_k-2\gamma_k\right)\cos\beta_k t+\\ +\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{0k}+\\ +\Bigg[-2\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Bigg[2\gamma_k\cos\beta_k t+\\ +\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{1k}+\\ +\Bigg[e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Bigg[-\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}(\gamma_k-\alpha_k)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{2k}+\\ +\int_0^t F_k(\tau;u,a)\Bigg[e^{\alpha_k(t-\tau)}+\\ +e^{\gamma_k(t-\tau)}\Bigg[\frac{\gamma_k-\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k(t-\tau)-\cos\beta_k(t-\tau)\Bigg]\Bigg]d\tau\Bigg\}\\ (k=1,2,\dots),\end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\alpha_k=\alpha_{1k}+\beta_{1k}-\frac{1}{3}$, $\beta_k=\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_{1k}-\beta_{1k})$,

$\gamma_k=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}(\alpha_{1k}+\beta_{1k})$, $b_k=\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2-2\alpha_k\gamma_k$,

причем

$$\begin{gathered}\alpha_{1k}=\Bigg\{-\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)+\\ +\left[\frac{1}{4}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)^2+\frac{1}{27}\left(\lambda_k^2-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}^{\frac{1}{3}},\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}\beta_{1k}=\Bigg\{\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)+\\ +\left[\frac{1}{4}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)^2+\frac{1}{27}\left(\lambda_k^2-\frac{1}{3}\right)^3\right]^{\frac{1}{2}}\Bigg\}^{\frac{1}{3}}.\end{gathered} \tag{2.7}$$

После подстановки выражений $u_k(t)\ (k=0,1,\dots)$ в (2.1), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7), получаем:

$$\begin{gathered}u(x,t)=\varphi_{00}+t\varphi_{10}+(t-1+e^{-t})\varphi_{20}+\\ +\int_0^t F_0(\tau;u,a)(e^{-(t-\tau)}+t-\tau-1)d\tau+\\ +\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg\{\frac{1}{b_k}\Bigg\{\Bigg[\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+\alpha_k e^{\gamma_k t}\Bigg[\left(\alpha_k-2\gamma_k\right)\cos\beta_k t+\\ +\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{0k}+\\ +\Bigg[-2\gamma_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Bigg[2\gamma_k\cos\beta_k t+\\ +\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{1k}+\\ +\Bigg[e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Bigg[-\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}(\gamma_k-\alpha_k)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{2k}+\\ +\int_0^t F_k(\tau;u,a)\Bigg[e^{\alpha_k(t-\tau)}+e^{\gamma_k(t-\tau)}\times\\ \times\Bigg[\frac{\gamma_k-\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k(t-\tau)-\cos\beta_k(t-\tau)\Bigg]\Bigg]d\tau\Bigg\}\Bigg\}\sin\lambda_k x.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Теперь, из (1.7), с учетом (2.1), имеем:

$$\begin{gathered}a(t)=[\mathrm{h(t)}]^{-1}\left[h'''(t)+h''(t)-\right.\\ \left.-f(0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left(u_k'(t)+\alpha u_k(t)\right)\right].\end{gathered} \tag{2.9}$$

Дифференцируя (2.5), два раза получим:

$$\begin{gathered}u'_k(t)=\frac{1}{b_k}\Bigg\{\Bigg[\alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+\\ +\alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\gamma_k t}\Bigg[-\cos\beta_k t+\\ +\frac{1}{\beta_k}(\gamma_k-\alpha_k)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{0k}+\Big[-2\alpha_k\gamma_k e^{\alpha_k t}+\\ +e^{\gamma_k t}\Bigg[\left(\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+\\ \Bigg[\frac{\gamma_k}{\beta_k}\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\sin\beta_k t\Bigg]\Bigg]\varphi_{1k}+\\ +\Bigg[\alpha_k e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Bigg[-\alpha_k\cos\beta_k t+\end{gathered}$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{2k}+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau;u,a)\Big[\alpha_k e^{\alpha_k(t-\tau)}+$$

$$+e^{\gamma_k(t-\tau)}\Big[\Big(\frac{\gamma_k}{\beta_k}\left(\gamma_k-\alpha_k\right)+\beta_k\Big)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)-$$

$$-\alpha_k\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\Big]\Big]d\tau\Big\}\ \left(k=1,2,...\right),\ (2.10)$$

$$u''_k(t)=\frac{1}{b_k}\Big\{\Big[\alpha_k^2\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+$$

$$+\alpha_k\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\gamma_k t}\Big[-\alpha_k\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k^2+\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{0k}+\Big[-2\alpha_k^2\gamma_k e^{\alpha_k t}+$$

$$+e^{\gamma_k t}\Big[2\alpha_k^2\gamma_k\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\left(\alpha_k^2\gamma_k^2-\alpha_k^2\beta_k^2-2\beta_k^2\gamma_k^2-\gamma_k^4-\beta_k^4\right)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{1k}+$$

$$+\Big[\alpha_k^2 e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Big[\left(\beta_k^2+\gamma_k^2-2\alpha_k\gamma_k\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k\beta_k^2+\gamma_k^3-\alpha_k\gamma_k^2+\alpha_k\beta_k^2\right)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{2k+}$$

$$+\int_0^t F_k(\tau;u,a)\Big[\alpha_k^2 e^{\alpha_k(t-\tau)}+$$

$$+e^{\gamma_k(t-\tau)}\Big[\frac{1}{\beta_k}\left(\gamma_k\beta_k^2+\gamma_k^3-\alpha_k\gamma_k^2+\alpha_k\beta_k^2\right)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)+$$

$$+\left(\gamma_k^2+\beta_k^2-2\alpha_k\gamma_k\right)\cos\beta_k t\Big]\Big]d\tau\Big\}\ \left(k=1,2,...\right).\ (2.11)$$

Далее, из (2.5) и (2.10), находим:

$$u'_k(t)+\alpha u_k(t)=\frac{1}{b_k}\Big\{\Big[\left(\alpha+\alpha_k\right)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+$$

$$+\alpha_k e^{\gamma_k t}\Big[\left(\alpha\alpha_k-2\alpha\gamma_k-\gamma_k^2-\beta_k^2\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\Big(\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)+$$

$$+\alpha\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\Big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{0k}+$$

$$+\Big[-2\left(\alpha+\alpha_k\right)\gamma_k e^{\alpha_k t}+$$

$$+e^{\gamma_k t}\Big[\left(2\alpha\gamma_k+\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\Big(\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)+$$

$$+\gamma_k\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\Big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{1k}+$$

$$+\Big[\left(\alpha+\alpha_k\right)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Big[-\left(\alpha_k+\alpha\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\Big(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\Big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{2k}+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau;u,a)\Big[(\alpha_k+\alpha)e^{\alpha_k(t-\tau)}+e^{\gamma_k(t-\tau)}\times$$

$$\times\Big[\frac{1}{\beta_k}\Big(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\Big)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)+$$

$$-\left(\alpha_k+\alpha\right)\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\Big]\Big]d\tau\Big\}\ \left(k=1,2,...\right).\ (2.12)$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) подставим выражение (2.12) в (2.9):

$$a(t)=[\mathrm{h(t)}]^{-1}\Big[h'''(t)+h''(t)-f(0,t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2}{b_k}\Big\{\Big[\left(\alpha+\alpha_k\right)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)e^{\alpha_k t}+$$

$$+\alpha_k e^{\gamma_k t}\Big[\left(\alpha\alpha_k-2\alpha\gamma_k-\gamma_k^2-\beta_k^2\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\Big(\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\left(\gamma_k^2+\beta_k^2\right)+$$

$$+\alpha\left(\gamma_k^2-\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)\Big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{0k}+$$

$$+\Big[-2\left(\alpha+\alpha_k\right)\gamma_k e^{\alpha_k t}+$$

$$+e^{\gamma_k t}\Big[\left(2\alpha\gamma_k+\alpha_k^2+\beta_k^2+\gamma_k^2\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\Big(\alpha\left(\alpha_k^2+\beta_k^2-\alpha_k\gamma_k\right)+$$

$$+\gamma_k\left(\alpha_k^2-\beta_k^2-\gamma_k^2\right)\Big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{1k}+$$

$$+\Big[\left(\alpha+\alpha_k\right)e^{\alpha_k t}+e^{\gamma_k t}\Big[-\left(\alpha_k+\alpha\right)\cos\beta_k t+$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\Big(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\Big)\sin\beta_k t\Big]\Big]\varphi_{2k}+$$

$$+\int_0^t F_k(\tau;u,a)\Big[(\alpha_k+\alpha)e^{\alpha_k(t-\tau)}+e^{\gamma_k(t-\tau)}\times$$

$$\times\Big[\frac{1}{\beta_k}\Big(\beta_k^2+\gamma_k^2-\alpha_k\gamma_k+\alpha\left(\gamma_k-\alpha_k\right)\Big)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)+$$

$$-\left(\alpha_k+\alpha\right)\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\Big]\Big]d\tau\Big\}\Big].\qquad(2.13)$$

Таким образом, решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) свелось к решению системы (2.8), (2.13) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) важную роль играет следующая

***Лемма* 2.1.** *Если* $\{u(x,t),a(t)\}$ *– любое решение задачи* (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) *то функции*

$$u_k(t)=l_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ \ (k=0,1,...)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (2.4), (2.5).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ – любое решение задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7). Тогда, умножив обе части уравнения (1.1) на функцию $l_k\cos\lambda_k x \ \ (k=0,1,...)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$l_k\int_0^1 u_t(x,t)\cos\lambda_k x dx=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(l_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=u_k'(t) \ \ (k=0,1,...),$$

$$l_k\int_0^1 u_{tt}(x,t)\cos\lambda_k x dx=u_k''(t) \ \ (k=0,1,...),$$

$$l_k\int_0^1 u_{ttt}(x,t)\cos\lambda_k x dx=u_k'''(t) \ \ (k=0,1,...),$$

$$l_k\int_0^1 u_{xx}(x,t)\cos\lambda_k x dx=$$

$$=-\lambda_k^2\left(l_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=-\lambda_k^2 u_k(t) \ \ (k=0,1,...),$$

$$l_k\int_0^1 u_{txx}(x,t)\cos\lambda_k x dx=$$

$$=-\lambda_k^2\frac{d}{dt}\left(l_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=-\lambda_k^2 u_k'(t)$$

$$(k=0,1,...)$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (2.2).

Аналогично, умножив обе части условия (1.2) на функцию $l_k\cos\lambda_k x \ \ (k=0,1,...)$ и интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1, получаем, что выполняется условие (2.3).

Таким образом, $u_k(t) \ \ (k=0,1,...)$ являются решением задачи (2.2), (2.3). А отсюда, непосредственно следует, что функции $u_k(t) \ \ (k=0,1,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (2.4), (2.5). □

Очевидно, что если

$$u_k(t)=l_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ \ (k=0,1,...)$$

являются решением системы (2.4), (2.5), то пара $\{u(x,t),a(t)\}$ функций

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x$$

и $a(t)$ является решением системы (2.8), (2.13).

Из леммы 2.1 следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть решение системы (2.8), (2.13) единственное. Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) имеет решение, то оно единственно.

С целью исследования задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) рассмотрим следующие пространства.

Обозначим через $B_{2,T}^3$ [11] совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\cos\lambda_k x \ \ (\lambda_k=k\pi),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t) \ (k=0,1,...)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J(u)=\|u_0(t)\|_{C[0,T]}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=J(u).$$

Известно [14], что $B_{2,T}^3$ является банаховым пространством.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\cos\lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_0(t)$, $\tilde{u}_k(t) \ (k=1,2,...)$ и $\tilde{a}_0(t)$ равны соответственно правым частям (2.4), (2.5) и (2.13).

Примем обозначения

$$\alpha_{2k}=-\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right]^2+\frac{1}{27}\left(\lambda_k^2-\frac{1}{3}\right)^3}, \quad (2.14)$$

$$\beta_{2k}=-\frac{1}{2}\left(\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right)+$$

$$+\sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right]^2+\frac{1}{27}\left(\lambda_k^2-\frac{1}{3}\right)^3}. \quad (2.15)$$

Тогда соотношения (2.6) и (2.7), соответственно, примут вид:

$$\alpha_{1k}=\sqrt[3]{\alpha_{2k}}, \ \ \beta_{1k}=-\sqrt[3]{\beta_{2k}}.$$

Отсюда, с учётом (2.14) и (2.15), получаем:

$$|\alpha_{1k}+\beta_{1k}|=\left|\sqrt[3]{\alpha_{2k}}-\sqrt[3]{\beta_{2k}}\right|=$$

$$=\left|\frac{\alpha_{2k}-\beta_{2k}}{\sqrt[3]{\alpha_{2k}^2}+\sqrt[3]{\alpha_{2k}\beta_{2k}}+\sqrt[3]{\beta_{2k}^2}}\right|\le$$

$$\le\frac{\left|\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2+\frac{2}{27}\right|}{\frac{1}{3}\left(\lambda_k^2-\frac{1}{3}\right)}\le\frac{\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)\lambda_k^2}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\lambda_k^2}+\frac{\frac{2}{27}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\lambda_k^2}\le\frac{9\alpha}{2}+\frac{11}{6},$$

$$\sqrt[3]{\beta_{2k}}<\alpha_{1k}-\beta_{1k}=\sqrt[3]{\alpha_{2k}}+\sqrt[3]{\beta_{2k}}<2\sqrt[3]{\beta_{2k}},$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{27}\lambda_k^6}}<\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\beta_{2k}}<\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\alpha_{1k}-\beta_{1k}\right)=$$

$$=\beta_k<\sqrt{3}\sqrt[3]{\beta_{2k}}.$$

Нетрудно видеть, что

$$|\alpha_k|\le\left|\alpha_{1k}+\beta_{1k}-\frac{1}{3}\right|\le\frac{9\alpha}{2}+\frac{13}{6}\equiv\varepsilon_1,$$

$$|\gamma_k|=\left|-\frac{1}{3}-\frac{\alpha_{1k}+\beta_{1k}}{2}\right|\le\frac{9\alpha}{4}+\frac{5}{4}\equiv\varepsilon_2,$$

$$\varepsilon_3\lambda_k\equiv\frac{1}{2}\lambda_k<\beta_k<$$

$$<\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{1}{27}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\alpha-\frac{1}{27}\right)^2+\frac{1}{27}}}\lambda_k\equiv\varepsilon_4\lambda_k,$$

$$b_k=\left(\alpha_k-\gamma_k\right)^2+\beta_k^2>\beta_k^2>\varepsilon_3^2\lambda_k^2.$$

Учитывая эти соотношения, находим

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]}\le|\varphi_{00}|+T|\varphi_{10}|+(T+2)|\varphi_{00}|+$$
$$+(T+2)\sqrt{T}\left(\int_0^T|f_0(\tau)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+ \qquad (2.16)$$
$$+(T+2)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_0(t)\|_{C[0,T]},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le\rho_0(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\varphi_{0k}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\rho_1(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2|\varphi_{1k}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\rho_2(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|\varphi_{2k}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\rho_2(T)\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k|f_k(\tau)|\right)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\rho_2(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right), \qquad (2.17)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le$$
$$\le\left\|[\mathrm{h(t)}]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\Big\{\|h'''(t)+h''(t)-f(0,t)\|_{C[0,T]}+$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\rho_3(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\varphi_{0k}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$+\rho_4(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3|\varphi_{1k}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\rho_5(T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2|\varphi_{2k}|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\rho_5(T)\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2|f_k(\tau)|\right)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$\left.+\rho_5(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Big\}, \qquad (2.18)$$

где

$$\rho_0(T)=\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2}\Big\{\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)e^{\varepsilon_1T}+$$
$$+\varepsilon_1e^{\varepsilon_2T}\left[\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right]\Big\},$$

$$\rho_1(T)=\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_2e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\left[2\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)\right]\right\},$$

$$\rho_2(T)=\frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_3^2}\left\{e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\left[1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\right]\right\},$$

$$\rho_3(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\Big\{\left(\alpha+\varepsilon_1\right)\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)e^{\varepsilon_1T}+$$
$$+e^{\varepsilon_2T}\Big[\varepsilon_1\left(\alpha\varepsilon_1+2\alpha\varepsilon_2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\left(\left(\varepsilon_1+\varepsilon_2\right)\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)+\alpha\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right)\Big]\Big\},$$

$$\rho_4(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\Big\{2\varepsilon_2\left(\alpha+\varepsilon_1\right)e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\Big[\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+$$
$$+2\alpha\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)+\alpha\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right)\Big]\Big\},$$

$$\rho_5(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\Big\{\left(\alpha+\varepsilon_1\right)e^{\varepsilon_1T}+$$
$$+e^{\varepsilon_2T}\left[\alpha+\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\alpha\varepsilon_2+\alpha\varepsilon_1+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right]\Big\}.$$

Предположим, что данные задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_0(x)\in C^2[0,1],\ \varphi_0'''(x)\in L_2(0,1),$ $\varphi_0'(0)=\varphi_0'(1)=0.$
2. $\varphi_1(x)\in C^2[0,1],\ \varphi_1'''(x)\in L_2(0,1),$ $\varphi_1'(0)=\varphi_1'(1)=0.$
3. $\varphi_2(x)\in C^1[0,1],\ \varphi_2''(x)\in L_2(0,1),$ $\varphi_2'(0)=\varphi_2'(1)=0.$
4. $f(x,t),f_x(x,t)\in C(D_T),\ f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T),$ $f_x(0,t)=f_x(1,t)=0\ \ (0\le t\le T).$
5. $h(t)\in C^3[0,T],\ h(t)\ne0\ \ (0\le t\le T).$

Тогда, из (2.16)–(2.18) получаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\le A_1(T)+B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \qquad (2.19)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \qquad (2.20)$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi_0(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\varphi_1(x)\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+(T+2)\|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}+(T+2)\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}+$$
$$+\rho_0(T)\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_1(T)\|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\rho_2(T)\|\varphi_2'(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_2(T)\sqrt{T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$
$$B_1(T)=\rho_2(T)T+(T+2)T,$$
$$A_2(T)=\left\|[\mathrm{h(t)}]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left\{\|h'''(t)+h''(t)-f(0,t))\|_{C[0,T]}+\right.$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\rho_3(T)\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_4(T)\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\right.$$
$$\left.\left.+\rho_5(T)\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_5(T)\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$
$$B_2(T)=\rho_5(T)\left\|[\mathrm{h(t)}]^{-1}\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}T.$$

Из неравенств (2.19), (2.20) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le$$
$$\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},\qquad(2.21)$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),$$
$$B(T)=B_1(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

***Теорема* 2.1.** *Пусть выполнены условия* 1–5 *и*

$$(A(T)+2)^2B(T)<1.\qquad(2.22)$$

Тогда задача (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) *имеет в шаре*

$$K=K_R\left(\|z\|_{E_T^3}\le R=A(T)+2\right)$$

пространства E_T^3 *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z,\qquad(2.23)$$

где $z=\{u,a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i=1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (2.8), (2.13).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K=K_R$ из E_T^3. Аналогично (2.21) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3}\le A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},\quad(2.24)$$
$$\|\Phi z_1-\Phi z_s\|_{E_T^3}\le\qquad(2.25)$$
$$\le B(T)R\left(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]}+\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\right).$$

Тогда из оценок (2.24) и (2.25), с учетом (2.22), следует, что оператор Φ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является единственным в шаре $K=K_R$ решением уравнения (2.23), т. е. $\{u,a\}$ является в шаре $K=K_R$ единственным решением системы (2.8), (2.13).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в D_T.

Теперь из (2.10) и (2.11) ясно, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k'(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)\le$$
$$\le\rho_6(T)\|\varphi_0'''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_7(T)\|\varphi_1'''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\rho_8(T)\|\varphi_2''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\rho_8(T)\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)+a(t)u_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$
$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\|u_k''(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)\le$$
$$\le\rho_9(T)\|\varphi_0''(x)\|_{L_2(0,1)}+\rho_{10}(T)\|\varphi_1''(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\rho_{11}(T)\|\varphi_2'(x)\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\rho_{11}(T)\sqrt{T}\|f_x(x,t)+a(t)u_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

где

$$\rho_6(T)=\frac{\varepsilon_1\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)}{\varepsilon_3^2}\left\{e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\left[1+\frac{1}{\varepsilon_3}(\varepsilon_1+n_2)\right]\right\},$$
$$\rho_7(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_1\varepsilon_2e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)\left(1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}\right)\right\},$$
$$\rho_8(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{\varepsilon_1e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\left[\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\right]\right\},$$
$$\rho_9(T)=\frac{\varepsilon_1\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2\right)}{\varepsilon_3^2}\times$$
$$\times\left\{\varepsilon_1e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\left[\varepsilon_1+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+\varepsilon_1\varepsilon_1\right)\right]\right\},$$
$$\rho_{10}(T)==\frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{2\varepsilon_1^2\varepsilon_2e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\times\right.$$
$$\left.\times\left[2\varepsilon_1^2\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2+\varepsilon_1^2\varepsilon_4^2+2\varepsilon_2^2\varepsilon_4^2+\varepsilon_2^4+\varepsilon_4^4\right)\right]\right\},$$
$$\rho_{11}(T)=\frac{1}{\varepsilon_3^2}\left\{\varepsilon_1^2e^{\varepsilon_1T}+e^{\varepsilon_2T}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\varepsilon_2^2+\varepsilon_4^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2+\frac{1}{\varepsilon_3}\left(\varepsilon_2\varepsilon_4^2+\varepsilon_2^3+\varepsilon_1\varepsilon_2^2+\varepsilon_1\varepsilon_4^2\right)\right]\right\}.$$

Отсюда следует, что $u_t(x,t)$, $u_{tx}(x,t)$, $u_{txx}(x,t)$ и $u_{tt}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Далее из (2.2) нетрудно увидеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\|u_k'''(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\|u_k''(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\|u_k'(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+2\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$2\left\|\left\|f_x(x,t)+a(t)u_x(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Из последнего соотношения ясно, что $u_{ttt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1.1) и условия (1.2), (1.3), (1.6) и (1.7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) в шаре $K=K_R$. В силу следствия леммы 2.1, это решение единственно в шаре $K=K_R$. □

С помощью леммы 1.1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1.1)–(1.5).

***Теорема* 2.2.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 2.1 *и*

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T),$$

$$\int_0^1 \varphi_i(x)dx=0 \quad (i=\overline{0,2}),$$

$$\varphi_0(0)=h(0),\ \varphi_1(0)=h'(0),\ \varphi_2(0)=h''(0).$$

Тогда задача (1.1)–(1.5) *имеет в шаре*

$$K=K_R\left(\|z\|_{E_T^{\frac{3}{2}}}\le R=A(T)+2\right)$$

из E_T^3 *единственное классическое решение.*

Заключение

В работе доказано существование и единственность решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с краевыми условиями Неймана. С помощью этих фактов доказано существование и единственность классического решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием первого рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тихонов*, *А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Доклады Академии наук СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.

2. *Лаврентьев*, *М.М.* Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.Т. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.

3. *Eskin*, *G.* Inverse problems for general second order hyperbolic equations with time-dependent coefficients / G. Eskin // Bulletin of Mathematical Sciences – 2017. – Vol. 7, № 2. – P. 247–307.

4. *Jiang*, *D.J.* Inverse source problem for the hyperbolic equation with a time-dependent principal part / D.J. Jiang, Y.K. Liu, M. Yamamoto // Journal of Differential Equations. – 2017. – Vol. 262, № 1. – P. 653–681.

5. *Nakamura*, *G.* On the identification of a coefficient function in a nonlinear wave equation/ G. Nakamura, M. Watanabe, B. Kaltenbacher // Inverse Problems. – 2009. – Vol. 25, № 3. – P. 035007.

6. *Vabishchevich*, *P.N.* Numerical solving the identification problem for the lower coefficient of parabolic equation / P.N. Vabishchevich, V.I. Vasil'ev // arXiv: 1304. 5923v1[cs.NA] 22 April 2013.

7. *Борухов*, *В.Т.* Численное решение обратной задачи восстановления источника в параболическом уравнении / В.Т. Борухов, П.Н. Вабищевич // Математическое моделирование. – 1988. – Т. 19. № 11. – С. 92–100.

8. *Мегралиев*, *Я.Т.* О задаче идентификации линейного источника для эллиптического уравнения второго порядка с интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Тр. Ин-та матем. – 2013. – Т. 21, № 2. – С. 128–141.

9. *Варламов*, *В.В.* О фундаментальном решении одного уравнения, описывающего распространение продольных волн в диспергирующей среде / В.В. Варламов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27, № 4. – С. 629–633.

10. *Варламов*, *В.В.* Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка / В.В. Варламов // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 1455–1457.

11. *Варламов*, *В.В.* Асимптотическое поведение энергии для интегродифференциального уравнения, описывающего акустические волны в релаксирующей среде в среде с дисперсией / В.В. Варламов // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 317, № 5. – С. 792–797.

12. *Мегралиев*, *Я.Т.* Обратная краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с интегральным условием / Я.Т. Мегралиев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2011. – Т. 32 (249), № 5. – С. 51–56.

13. *Мегралиев*, *Я.Т.* Об одной обратной краевой задаче для гиперболического уравнения второго порядка с интегральным условием первого рода / Я.Т. Мегралиев // Вестник Брянского государственного университета. – 2011. – № 4. – С. 22–28.

14. *Худавердиев*, *К.И.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью / К.И. Худавердиев, А.А. Велиев. – Б.: Чашыоглы, 2010. – 162 с.

Поступила в редакцию 29.01.19.