Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 519.55 *МАТЕМАТИКА*

А. Г. ПИНСКЕР, В. В. КУЗЬМИНА

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 XII 1970)

Пусть X — линейное полуупорядоченное пространство Канторовича и P — его выпуклое подмножество с порядком, индуцированным порядком в X. В множестве P вместе с любыми его элементами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ содержится и произвольная их выпуклая комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots$ $\ldots + \lambda_n x_n$ $(\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0, \ldots, \lambda_n \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1)$. Если при этом в P содержатся элементы $y_1 \leqslant x_1,\ y_2 \leqslant x_2, \ldots, y_n \leqslant x_n$, то, очевидно, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_n y_n \leqslant \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$. Тем самым, в P определена некоторая алгебраическая операция (выпуклая комбинация его элементов), естественным образом согласованная с порядком. Представляет интерес выделение класса абстрактных множеств с введенными в них алгебраическими операциями и отношением порядка изоморфных выпуклым подмножествам полуупорядоченных пространств. Решению этой задачи и посвящена настоящая статья.

Определим прежде всего понятие квазилинейного множества. Пусть K — множество элементов произвольной природы, в котором для любой конечной системы его элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и чисел $\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0, \ldots$ $\ldots, \lambda_n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leqslant 1$, однозначно определен элемент $x \in K$, именуемый «квазивыпуклой комбинацией элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$» в обозначении $x = \lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \lambda_2 \cdot x_2 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n \cdot x_n$. В частности, в K определен элемент $\lambda \cdot x$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и $x \in K$. При этом предполагаются выполненными аксиомы:

К1. $\lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_k \cdot x_k \dotplus \ldots \dotplus \lambda_l \cdot x_l \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n \cdot x_n = \lambda_1 x_1 \dotplus \ldots$ $\ldots \dotplus \lambda_l \cdot x_l \dotplus \ldots \dotplus \lambda_k \cdot x_k \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n \cdot x_n$.

К2. *Если* $\alpha_1 \cdot z_1 \dotplus \ldots \dotplus \alpha_k \cdot z_k = \beta_1 \cdot t_1 \dotplus \ldots \dotplus \beta_l \cdot t_l$, *то равенства*

$$\lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_m \cdot x_m = \mu_1 \cdot y_1 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n \cdot y_n;$$

$$\lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_m \cdot x_m \dotplus \alpha_1 \cdot z_1 \dotplus \ldots \dotplus \alpha_k \cdot z_k = \\ = \mu_1 \cdot y_1 \dotplus \ldots \dotplus \mu_n \cdot y_n \dotplus \beta_1 \cdot t_1 \dotplus \ldots \dotplus \beta_l \cdot t_l$$

равносильны.

К3. $\lambda \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus \lambda_n \cdot x_n) = (\lambda\lambda_1) \cdot x_1 \dotplus \ldots \dotplus (\lambda\lambda_n) \cdot x_n$.

К4. $\lambda \cdot x \dotplus \mu \cdot x = (\lambda + \mu) \cdot x$.

К5. *В K содержится «нулевой элемент» θ такой, что $0 \cdot x = \theta$ для любого $x \in K$.*

К6. $1 \cdot x = x$.

Здесь и в дальнейшем при записи квазивыпуклой комбинации элементов K предполагается, что коэффициенты неотрицательны и в сумме не превосходят единицы. В случае, когда $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, квазивыпуклую комбинацию элементов K будем называть просто их выпуклой комбинацией.

Выпуклое множество K произвольного линейного пространства L превращается в квазилинейное, если положить

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n,$$

где x_0 — произвольный, но фиксированный элемент K, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые элементы K и $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$. Нетрудно проверить, что при таком определении квазивыпуклой комбинации элементов K выполняются все аксиомы квазилинейного множества, при этом роль нулевого элемента ∂ играет элемент x_0.

Теорема 1. *Любое квазилинейное множество K может быть расширено до линейного множества L так, что*

1) *выпуклая комбинация $\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n$ элементов K совпадает с выпуклой (в обычном смысле) комбинацией тех же элементов в L.*

$$\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\right);$$

2) *любой элемент L может быть представлен в виде $\lambda(x - y)$, где $\lambda > 0$ и $x, y \in K$;*

3) *множество K, рассматриваемое как часть L, будет его выпуклым подмножеством.*

Условимся пространство L называть линейным расширением квазилинейного множества K.

Будем говорить, что X — линейное полуупорядоченное пространство общего вида, если X

1) линейное множество,

2) частично упорядоченное множество,

3) алгебраические операции в X согласованы с порядком, именно: соотношение $x \geqslant y$ влечет за собой $\lambda x + z \geqslant \lambda y + z$ $(\lambda \geqslant 0,\ x,\ y,\ z \in X)$.

Пусть теперь P — выпуклое подмножество X, тогда квазивыпуклая комбинация его элементов (определенная выше) согласуется с порядком в P, индуцированным X, следующим образом.

P1. Равенства $x \geqslant y$ и $\lambda \cdot x \geqslant \lambda \cdot y$ $(0 < \lambda < 1)$ равносильны.

P2. Если $x \geqslant y$ и $z \geqslant t$, то $\lambda \cdot x + \mu \cdot z \geqslant \lambda \cdot y + \mu \cdot t$.

P3. Если $\lambda \cdot x + \mu \cdot z = \lambda \cdot y + \mu \cdot t$ и $x \geqslant y$, то $z \leqslant t$.

Квазилинейное частично упорядоченное множество P, в котором выполняются аксиомы $P1 - P3$, будем называть квазилинейным полуупорядоченным множеством.

Теорема 2. *Любое квазилинейное полуупорядоченное множество P может быть расширено до линейного полуупорядоченного пространства X общего вида*

Действительно, пусть X — линейное расширение P. Выделим в X класс положительных элементов, полагая $u = \lambda(x - y) \geqslant 0$ $(u \in X,\ x,\ y \in P,\ \lambda > 0)$, если $x \geqslant y$ в P. Легко проверить, что в X будут иметь место все аксиомы линейного полуупорядоченного пространства общего вида. Если квазилинейное полуупорядоченное множество P представляет собой структуру (условимся называть его квазилинейной структурой), то его расширение X окажется линейной структурой (K-линеалом), а P — подструктурой X. Если u и v — элементы X, $u = \lambda(x - y)$, $v = \mu(z - t)$ $(x,\ y,\ z,\ t \in P,\ \lambda,\ \mu > 0)$, то соотношение $|u| \leqslant |v|$ в X, как нетрудно проверить, равносильно

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot (x \vee y) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot (z \wedge t) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot (x \wedge y) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot (z \vee t) \text{ в } P. *$$

Как известно, линейное полуупорядоченное пространство общего вида, являющееся вместе с тем условно полной структурой, называется

K-пространством. Пусть P — квазилинейное полуупорядоченное множество, в котором имеет место дополнительная аксиома (условие Архимеда)

P 4. Если $\lambda\cdot x+\frac{\mu}{n}\cdot z\leqslant\lambda\cdot y+\frac{\mu}{n}\cdot t \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$, *то* $x\leqslant y$.

Теорема 3. *Любое квазилинейное полуупорядоченное множество с условием Архимеда изоморфно выпуклому подмножеству некоторого K-пространства.*

Обратно, любое выпуклое подмножество K-пространства при обычных определениях квазивыпуклой комбинации и порядка превращается в квазилинейное полуупорядоченное множество с условием Архимеда.

Укажем теперь внутреннюю характеристику выпуклого множества линейного нормированного пространства. С этой целью введем понятие квазилинейного метрического пространства, понимая под ним множество R, являющееся одновременно квазилинейным множеством и метрическим пространством с аксиомой

$R1.$ $\rho(\lambda\cdot x+\mu\cdot z, \lambda\cdot y+\mu\cdot z)=\lambda\rho(x, y) \quad (x, y, z\in R)$,
связывающей алгебраические операции в R с метрикой.

Теорема 4. *Любое квазилинейное метрическое пространство R изоморфно и изометрично выпуклому подмножеству некоторого линейно нормированного пространства E.*

Обратно, любое выпуклое подмножество линейного нормированного пространства E при естественном определении квазивыпуклой комбинации его элементов и метрики оказывается квазилинейным метрическим пространством.

Теорема 5. *Для того чтобы квазилинейное метрическое пространство S было изоморфно и изометрично единичному шару некоторого линейного нормированного пространства E, необходимо и достаточно, чтобы в S наряду с аксиомой $R1$ выполнялись аксиомы*

$R2.$ *Для любого элемента $x\in S$ существует элемент $x'\in S$ такой, что* $^1/_2\cdot x+{}^1/_2\cdot x'=\theta$ (*симметричность*).

Очевидно, что элемент x' совпадает с элементом $-x$ в E.

$R3.$ *Для любого* $x\in S \quad \rho(x, \theta)\leqslant 1$.

$R4.$ *Если* $x, y\in S$ и $\rho(x, y)=1/\lambda$, *где* $\lambda>{}^1/_2$, *то в S содержится элемент z такой, что* $\frac{1}{2\lambda}\cdot z={}^1/_2\cdot x+{}^1/_2\cdot(-y)$.

Комбинируя понятия квазилинейного полуупорядоченного множества и квазилинейного метрического пространства, легко указать характеристику некоторых классов нормированных полуупорядоченных пространств.

Теорема 6. *Квазилинейная структура, являющаяся вместе с тем квазилинейным метрическим пространством, в котором соотношение* (*) *влечет за собой*

$R5.$ $\lambda\rho(x, y)\leqslant\mu\rho(z, t)$,
изоморфна и изометрична выпуклому подмножеству некоторой нормированной структуры (KN-*линеал*).

Обратно, любое выпуклое подмножество нормированной структуры при естественных определениях квазилинейной комбинации его элементов, порядка и метрики оказывается квазилинейной метрической структурой с условием $R2$.

Легко видеть, что теорема 6 дает характеризацию не только выпуклого подмножества KN-линеала, но вместе с тем и KN-пространства. Нетрудно также охарактеризовать выпуклые подмножества пространства Канторовича — Банаха (KB-пространства).

Ленинградский инженерно-экономический институт им. П. Тольятти

Поступило 9 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, 1961.
[2] В. В. Кузьмина, Метрическое пространство со средними элементами, Л., 1966.
[3] В. В. Кузьмина, Сибирск. матем. журн., № 3 (1968).