Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

М. Я. АНТОНОВСКИЙ, В. З. ПОЛЯКОВ

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕТКАХ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ГОМОМОРФИЗМАХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 5 X 1970)

Известно, что совокупности $\mathrm{T}(X)$ всех топологий множества X, всех его близостей (неотделимых, вообще говоря) $\text{Б}(X)$, всех равномерностей $\mathrm{P}(X)$ и всех классов эквивалентности метрик $\mathrm{M}(X)$ [1] над X образуют полные решетки, причем эти решетки связаны естественными гомоморфизмами $\mathrm{M}(X) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{P}(X) \xrightarrow{\psi} \text{Б}(X) \xrightarrow{\chi} \mathrm{T}(X)$. Указанная последовательность при фиксированном X представляет собой сечение соответствующих категорий, а гомоморфизмы суть сечения соответствующих функторов.

Во многих случаях приходится пользоваться только частью аксиом, определяющих указанные выше структуры. Например, мы будем рассматривать несимметричные равномерности и порождаемые ими близости. При этом возникают полные решетки $\text{Б}'(X)$ и $\mathrm{P}'(X)$ обобщенных близостей и равномерностей и соответствующие гомоморфизмы φ', ψ' и χ'. Гомоморфизм χ' зависит от принятия естественной топологии в пространстве близости X^δ; обычно полагают $x \in [M] \Leftrightarrow \{x\}\delta M$. При таком определении гомоморфизм χ' в отличие от χ оказывается эпиморфизмом [2, 6] наряду с φ' и ψ'. Известен также функтор p (Александрова — Смирнова) из категории близостных в категорию равномерных пространств, соотносящий каждой близости ее наименьшую равномерность; таким образом, $\psi p = \mathrm{id}\colon \text{Б}(X) \to \text{Б}(X)$. Подрешетки $\text{Б}(X) \subset \text{Б}'(X)$ и $\mathrm{P}(X) \subset \mathrm{P}'(X)$ рефлексивны и корефлексивны; корефлексия $s(\zeta)$ определяется как $\zeta \vee \zeta^*$, где ζ^* — сопряженная близость, а рефлексия $r(\zeta)$ — как $\zeta \wedge \zeta^*$; аналогично определяются верхняя и нижняя симметризации в решетке $\mathrm{P}'(X)$.

Цель настоящей заметки — изучить строение множеств $\chi'^{-1}(t)$ для различных $t \in \mathrm{T}(X)$, а также $\psi'^{-1}(\zeta)$ и $(\psi'\varphi')^{-1}(\zeta)$ при $\zeta \in \text{Б}'(X)$. В рассмотрение вводятся некоторые специальные равномерности и близости, так называемые WM-равномерности и близости, а также WM^*-близости, т. е. такие, для которых сопряженная структура также обладает свойством WM.

Пусть t — произвольный элемент $\mathrm{T}(X)$. Известно, что $(\chi'\psi')^{-1}(t)$ и $\chi'^{-1}(t)$ являются полными полурешетками вверх. Мы показываем, что если t локально биокомпактна, то совокупность WM^*-близостей из $\chi'^{-1}(t)$, так же как и WM^*-равномерностей из $(\chi'\psi')^{-1}(t)$, образует полную решетку. Если ζ есть WM-близость, то $\chi'(\zeta) > \chi'(\zeta^*)$, а если она WM^*-близость, то $\chi'(\zeta) = \chi'(\zeta^*)$.

В множестве $\psi'^{-1}(\zeta)$ всегда есть наименьшая — «прекомпактная» — равномерность (если ζ симметрична, то это обычная прекомпактная равномерность). Вообще говоря, $\bigvee\psi'^{-1}(\zeta) \notin \psi'^{-1}(\zeta)$; в том случае, когда $\bigvee\psi'^{-1}(\zeta) \in \psi'^{-1}(\zeta)$, близость ζ, по аналогии с классическим случаем [3], будем называть правильной. Таким образом, если ζ правильна, множество $\psi'^{-1}(\zeta)$ представляет собой полную решетку. Подмножество правильных близостей корефлексивно в $\text{Б}'(X)$, т. е. у каждой близости ζ имеется п о п р а в л е н и е $\zeta!!$; для симметричных близостей $\zeta!! > \zeta!$

Пусть (X, t) — произвольное топологическое пространство. Отношение $\gamma = \gamma(t)$, определяемое как $A\,\gamma\,B \Leftrightarrow A \cap [B] \neq \phi$, удовлетворяет всем аксиомам несимметричных близостей (в том числе и «нормальности»: если $A \bar{\gamma} B$, то $A \bar{\gamma} [B]$ и $X \setminus [B] \bar{\gamma} B$); вспомнив определение гомоморфизма χ', получаем $\chi'(\gamma) = t$.

Лемма 1. *Пусть $\xi \in Б'(X)$ — несимметричная близость и пусть $A\bar{\xi}B$, $A, B \subset X^\xi$. Тогда существуют открытое $A' \supset A$ и замкнутое $B' \supset B$ с $A' \bar{\xi} B'$.*

Доказательство. Пусть $A \Subset O \bar{\xi} B$ и $x \in [B]$. Очевидно, $x \notin O$, поэтому $O \cap [B] = \phi$. Итак, $A \bar{\xi} B \Rightarrow A \bar{\xi} [B]$.

Далее, $A\xi X \setminus O$, поэтому $A\bar{\xi}[X \setminus O]$ и, значит, $A \subset X \setminus [X \setminus O] = \mathrm{Int}\, O \subset \varphi \overline{B}$. Таким образом, $A \subset \mathrm{Int}\, O \bar{\xi} B$ и, следовательно, $A \subset \mathrm{Int}\, O \bar{\xi} [B] \supset B$. Полагаем, $A' = \mathrm{Int}\, O$ и $B' = [B]$.

Следствие. *Близость $\gamma(t)$ есть грубейший элемент в $\chi'^{-1}(t)$.*

Равномерность $p(\gamma(t))$, предбазу которой образуют всевозможные окружения вида $X^2 \setminus O \times (X \setminus O) = (X \setminus O) \times X \cup O^2$, была построена Первином в (2), но ее место, как наименьшей в наибольшем δ-классе, указано не было.

Теорема 1. *Пусть ξ, $\eta \in Б'(X)$ — произвольные несимметричные близости и $p(\xi)$, $p(\eta) \in Р'(X)$ — их наименьшие равномерности. Функтор p: $Б'(X) \to Р'(X)$ Александрова — Смирнова аддитивен.*

Доказательство. Нужно показать $p(\xi \vee \eta) = p(\xi) \vee p(\eta)$. В одну сторону это очевидно, так как из $\xi \vee \eta > \xi, \eta$ следует $p(\xi \vee \eta) > p(\xi)$, $p(\eta)$ и поэтому $p(\xi \vee \eta) > p(\xi) \vee p(\eta)$. Для доказательства обратного заметим, что всякие два множества, далекие в ξ или η, далеки в смысле равномерности $p(\xi) \vee p(\eta)$, а следовательно, ее близость мажорирует $\xi \vee \eta$. Поэтому сама равномерность $p(\xi) \vee p(\eta)$ мажорирует $p(\xi \vee \eta)$.

Теорема 2. *Пусть $\xi \in Б'(X)$ и $\xi > \psi'(u)$ для некоторой $u \in Р'(X)$. Тогда $\psi'(u \vee p(\xi)) = \xi$.*

Доказательство. Очевидно, что $\psi'(u \vee p(\xi)) > \xi$. Обратно, допустим, два множества C и D отделяются пересечением окружностей из u и $p(\xi)$ (а произвольные два далеких множества в $X^{\psi(u \vee p(\xi))}$ представимы в виде конечных объединений таких множеств). Итак, существуют $U \in u$ и $A\bar{\xi}B$ такие, что $(C \times D) \cap (U \setminus A \times B) = \phi$. Справедливо соотношение $C \times D = C \times (D \setminus B) \cup (C \setminus A) \times (D \cap B) \cup (C \cap A) \times (B \cap D)$. Два первых слагаемых не пересекаются с $A \times B$ и потому не пересекаются с U. Таким образом, $C \bar{\xi} D \setminus B$ и $C \setminus A \bar{\xi} D \cap B$, ввиду $\psi'(u) < \xi$; кроме того, очевидно, $C \cap A \bar{\xi} B \cap D$. Из второго и третьего соотношений следует $C \bar{\xi} D \cap B$; комбинируя это с первым, получаем $C \bar{\xi} D$.

Следствие. *Если $\xi > \eta$, то существует изотонное отображение f: $\psi'^{-1}(\eta) \to \psi'^{-1}(\xi)$. Если близости ξ и η симметричны, причем близость η правильна (3), то ограничение $f | \psi^{-1}(\eta) \to \psi^{-1}(\xi)$ есть изоморфизм «в»* *.

Равномерность $u \in Р'(X)$ назовем WM-равномерностью, если замкнутые окружения образуют ее базу. Близость $\xi \in Б'(X)$ будет называться WM-близостью, если из $A \bar{\xi} B$ следует $[A] \bar{\xi} [B]$. Наконец, равномерность u и близость ξ будут называться WM^*-равномерностью или близостью, если аналогичное условие выполняется и в смысле сопряженной топологии; добавочное требование, как нетрудно видеть, эквивалентно тому, что равномерность u^*, соответственно близость ξ^*, также обладают свойством WM.

Лемма 2. *Близость $\xi \in Б'(X)$ является WM-близостью тогда и только тогда, когда каждую пару далеких множеств A, $B \subset X^\xi$ можно заключить в далекие открытые окрестности.*

Необходимость. Пусть $A \Subset B$ и $A \Subset C \bar{\xi} B$. Имеем $[C] \bar{\xi} B$, следовательно, $[C] \cap B = \phi$. С другой стороны, $A \Subset [C]$, поэтому

* Взаимная однозначность $f | \psi^{-1}(\eta)$ следует из результатов работы (5).

$A \bar{\xi} X \setminus [C] \supset B$. Множество A можно заключить в открытую окрестность, далекую от $X \setminus [C]$, в силу леммы 1.

Достаточность. Пусть снова $A \Subset C \bar{\xi} B$. Существует открытое $O \supset X \setminus C$ такое, что $A \bar{\xi} O$. Поэтому $[A] \cap (X \setminus C) = \phi$, т. е. $[A] \subset C$, Следовательно, $[A] \bar{\xi} B$, а значит, и $[A] \bar{\xi} [B]$.

Теорема 3. *Близость* $\zeta \in Б'(X)$ *тогда и только тогда является* WM-*близостью, когда* $p(\zeta)$ *является* WM-*равномерностью.*

Доказательство. Если $A \bar{\zeta} B$, то существуют открытые G и H такие, что $A \subset G \bar{\zeta} H \supset B$. Множества вида $X^2 \setminus G \times H$ образуют замкнутую предбазу, а их конечные пересечения — базу в $p(\zeta)$.

Пусть, наоборот, наименьшая равномерность близости ζ обладает свойством WM. Итак, для каждой пары множеств $A \bar{\zeta} B$ имеется замкнутое $U \in p(\zeta)$ с $(A \times B) \cap U = \phi$. Мы знаем, что $U = \bigcap\{X^2 \setminus A_i \times B_i \mid i \in J\}$, где $|J| < \aleph_0$, поэтому $A \times B \subset \bigcup\{A_i \times B_i \mid i \in J\}$, причем указанное объединение открыто. Покажем, что A и B можно заключить в открытые окрестности G и H с $G \times H \subset \bigcup\{A_i \times B_i \mid i \in J\}$. Пусть $a \in A$ и $O_a B = \mathrm{pr}_2(\bigcup\{A_i \times B_i \mid i \in J\} \cap (\{a\} \times X)) \supset B$. Очевидно, что $O_a B = \bigcup\{B_i \mid i \in J'\}$ для некоторого $J' \subset J$, и поэтому среди множеств $O_a B$ в действительности не более $2^{|J|}$ различных. Пересечение $H = \bigcap\{O_a B \mid a \in A\}$, таким образом, открыто. Аналогично, полагаем $G = \bigcap\{O_b A \mid b \in B\}$.

Определим на отрезке $I = [0; 1]$ близость η условием

$$A \eta B \Leftrightarrow \sup A \geqslant \inf B;$$

очевидно, $s(\eta)$ есть обычная близость отрезка. Функция $\Phi\colon P \to I$, по определению, близостно полунепрерывна сверху, если $\Phi\colon P \to I^\eta$ близостно непрерывна.

Теорема 4. *Для того чтобы пространство близости* X^ζ *было* WM-*пространством, необходимо и достаточно, чтобы всякие два его далекие множества отделялись непрерывной близостно полунепрерывной сверху функцией.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $A \bar{\zeta} B$. Построим для каждого двоично-рационального числа ε, $0 < \varepsilon < 1$, открытое множество O_ε, полагая $A \Subset O_{1/2} \Subset X \setminus B$; $A \Subset O_{1/4} \Subset O_{1/2}$, $O_{1/2} \Subset O_{3/4} \Subset X \setminus B$ и т. д.; пусть, наконец, $O_0 = \phi$ и $O_1 = X$; очевидно,

$$\varepsilon < \xi \Rightarrow O_\varepsilon \Subset O_\xi.$$

Для произвольного $x \in X$ полагаем $\Phi(x) = \inf\{\varepsilon \mid x \in O_\varepsilon\}$; таким образом, построена функция $\Phi\colon X \to I$, отделяющая A и B, причем, как легко проверяется, $\Phi\colon X^\zeta \to I^\eta$ близостно непрерывна.

Покажем, что $\Phi\colon (X, \chi'(\zeta)) \to I$ непрерывна. Пусть $(\alpha, \beta) \subset I$. Рассмотрим двоично-рациональные числа $\alpha < \varepsilon_1 < \xi < \varepsilon_1' < \varepsilon_2' < \varepsilon_2 < \beta$. Справедливо $O \bar{\zeta} X \setminus O_{\varepsilon_1'}$. Далее, имеется открытое V с $O_\xi \bar{\zeta} V \supset X \setminus O_{\varepsilon'}$. Пусть, наконец, $W = V \cap O_{\varepsilon_2'}$. Утверждается, что $\Phi^{-1}(\varepsilon_1', \varepsilon_2') \subset W \subset \Phi^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Действительно, допустим, что $\varepsilon_1' < \Phi(x) < \varepsilon_2'$. Тогда из первого неравенства следует $x \notin O_{\varepsilon_1'}$, а значит, и $x \in X \setminus O_{\varepsilon_1'} \subset V$, а из второго — $x \in O_{\varepsilon_2'}$. Наоборот, пусть $x \in W$. Ввиду $x \in O_{\varepsilon_2'}$ имеем $\Phi(x) \leqslant \varepsilon_2' < \varepsilon_2$; из $x \in V$ следует $x \notin O_\xi$ и $\Phi(x) \geqslant \xi > \varepsilon_1$.

Таким образом, $\Phi^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, а вместе с ним и $\Phi^{-1}(\alpha, \beta)$, удается представить в виде объединения открытых множеств: $\Phi^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \bigcup\{W_{\varepsilon_1', \varepsilon_2'} \mid \varepsilon_1 < \varepsilon_1' < \varepsilon_2' < \varepsilon_2\}$. Аналогично показывается, что открыты $\Phi^{-1}[0; \beta)$ и $\Phi^{-1}(\alpha; 1]$.

Достаточность. Допустим, $A \bar{\zeta} B$, и пусть $\Phi\colon X \to I$ — разделяющая их функция. Ввиду непрерывности Φ множества $G = \Phi^{-1}[0; 1/3) \supset A$ и $H = \Phi^{-1}(2/3; 1] \supset B$ открыты, а ввиду близостной полунепрерывности — далеки.

С л е д с т в и е 1. *Топология* $\chi'(\zeta) = t$ *WM-близости* ζ *вполне регулярна, причем* $\zeta < \beta(t)$.

С л е д с т в и е 2. *Если* ζ *есть WM-близость, то* $\chi'(\zeta) > \chi'(\zeta^*)$; *если она* WM^**-близость, то* $\chi'(\zeta) = \chi'(\zeta^*)$.

С л е д с т в и е 3. *Верхняя симметризация WM-близостей сохраняет топологию.*

В самом деле, если $\chi'(\zeta) = t$, справедливо $\zeta < \beta(t) = \beta$ и $\zeta^* < \beta^* = \beta$, поэтому $\zeta < s(\zeta) = \zeta \vee \zeta^* < \beta$.

Т е о р е м а 5. *Если* $\zeta \in Б'(X)$ *есть* WM^**-близость, а ее топология* $t = \chi'(\zeta)$ *локально бикомпактна, то* $\zeta > \mathrm{o}(t)$. (Здесь о означает александровскую близость, т. е. близость, соответствующую одноточечной компактификации.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно, в пространстве близости $X^{\mathrm{o}(t)}$ два множества далеки тогда и только тогда, когда их замыкания не пересекаются, причем по крайней мере одно из них бикомпактно. Предположим, что $A \overline{\mathrm{o}} B$. Итак, $[A] \cap [B] = \phi$ и одно из замыканий, например $[B]$, бикомпактно. Для каждой точки $x \in [B]$, ввиду $\chi'(\zeta^*) = \chi'(\zeta) = t$, справедливо $\{x\}\overline{\zeta^*}[A]$, поэтому можно найти открытое O_x, $x \in O_x \subset (X, t)$, для которого $O_x\overline{\zeta^*}A$ или, что то же самое, $A\overline{\zeta}O_x$. Система множеств $\{O_x | x \in \in [B]\}$ образует внешнее покрытие бикомпактного $[B]$, поэтому оно имеет конечное подпокрытие, для объединения S элементов которого, очевидно, справедливо $A \overline{\zeta} S \supset [B] \supset B$. Аналогично, но не прибегая к сопряженной близости, показывается, что $A \overline{\zeta} B$ в случае, когда $A \overline{\mathrm{o}} B$ и бикомпактно $[A]$.

С л е д с т в и е 1. *Если* $\zeta \in Б'(X)$ — WM^**-близость, топология которой локально бикомпактна, то топологии ее верхней и нижней симметризаций совпадают:* $\chi'(\imath(\zeta)) = \chi'(s(\zeta))$.

В самом деле, если $\chi'(\zeta) = t$, то $\zeta > \mathrm{o}(t) = \mathrm{o}$ и, следовательно, $\zeta^* > \mathrm{o}^* = \mathrm{o}$. Таким образом, $\imath(\zeta) = \zeta \wedge \zeta^* > \mathrm{o}$, а значит, $\chi'(\imath(\zeta)) = = \chi(\mathrm{o}) = t$; совпадение $\chi'(s(\zeta)) = t$ мы уже установили.

С л е д с т в и е 2. WM^**-близости локально бикомпактного топологического пространства* (X, t) *образуют полную решетку с наибольшим и наименьшим элементами* $\beta(t)$ *и* $\mathrm{o}(t)$.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР

Академия педагогических наук СССР
Москва

Поступило
14 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. А н т о н о в с к и й, Усп. матем. наук, 24, № 1 (1969). [2] W. J. P e r v i n, Found. of General Topology, N. Y., 1964. [3] В. З. П о л я к о в, ДАН, 154, № 1 (1964). [4] W. J. T h r o n, Topological Structures, № 4 (1966). [5] J. L. H u r s c h, Math. Scand., 17, № 2, 150 (1965). [6] M. K l e i b e r, W. J. P e r v i n, Bull. Austral. Math. Soc., 1, 127 (1969).