Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 532.522.2 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Б. П. БЕЛОГЛАЗОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ УРАВНЕНИЙ СВОБОДНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ОСНОВАННОМ НА ИХ ИНВАРИАНТАХ

(*Представлено академиком Г. И. Петровым 25 IX 1970*)

1. В приближении теории пограничного слоя ([1, 2]) запишем уравнения плоских и осесимметричных струйных течений в общем безразмерном виде, пригодном к ламинарному и турбулентному (с использованием гипотезы Л. Прандтля) случаям, а именно:

$$y^s u\,\frac{\partial u}{\partial x} + y^s v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^s\,\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad y^s\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\,(y^s v) = 0 \tag{1}$$

($s=0$ соответствует плоской струе, $s=1$ — осесимметричной, но в общем будем считать параметр $s>-1$). Решение (1) ищется в области $x>x_0$, $0\leqslant y\leqslant\infty$ с граничными условиями

$$\partial u\,/\,\partial y = v = 0 \ \text{ при } \ y=0, \quad u\to m \ \text{ при } \ y\to\infty, \tag{2}$$

где m означает отношение значений скорости спутного потока и начальной осевой скорости струи. (При введенном в (1) условии изобаричности течения ограничиваемся областью значений $0\leqslant m<3$.) Кроме граничных условий обычно задается начальный профиль струи $u^0(y)=u(x_0, y)$.

Одна из трудностей решения гранично-начальных задач о струйных течениях связана с неограниченностью области интегрирования по переменной y. Эту область можно преобразовать в конечную многими искусственными способами. Л. Крокко ([3]) принадлежит примечательное в теории пограничного слоя преобразование, основанное на физических характеристиках течения. Однако его преобразование неприменимо, вообще говоря, в теории струй (а также в тех случаях обтекания тел, когда скорость в пограничном слое превышает скорость на внешней границе). Автору ([4]) удалось использовать уравнения Крокко для расчета полуструи с помощью дополнительного преобразования, ослабляющего особенность на внешних границах слоя.

Струйные течения имеют свои физические инварианты, с помощью которых можно получить уравнения со свойствами уравнений Крокко. Так, рассматриваемые струйные течения характеризуются условием постоянства избыточного импульса, определяемого величиной

$$\int\limits_0^\infty y^s u\,(u-m)\,dy = \int\limits_0^\infty y^s u^0\,(u^0-m)\,dy = I_0 = \text{const}. \tag{3}$$

(При $s>-1$ функции $u^0(y)$ задаются из класса функций, для которых интеграл I_0 существует.)

2. Применим к (1) преобразование с использованием инварианта (3) в общем виде, т. е. при любых $s>-1$. Пусть, для определенности, $u-m>0$ во всей области течения, за исключением внешней границы струи, где $u=m$.

Введем новые переменные

$$\xi = x, \quad \eta = \left[(s+1)\int\limits_0^y y_1^s\, u\,(u-m)\,dy_1\right]^{1/(s+1)}, \tag{4}$$

с помощью которых уравнение неразрывности можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(y^s v - u y^s\,\frac{\partial y}{\partial\xi}\right) = \frac{\eta^s}{(u-m)^2}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}. \tag{5}$$

После этого уравнение движения преобразуется следующим образом:

$$\frac{\eta^s}{u-m}\,\frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial u}{\partial\eta}\int\limits_0^\eta \frac{\eta_1^s}{(u-m)^2}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}\,d\eta_1 = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[(u-m)\int\limits_0^\eta \frac{\eta_1^s}{(u-m)^2}\,\frac{\partial u}{\partial\xi}\,d\eta_1\right] = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(y^s\,\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{6}$$

Интегрируя (6) в пределах от 0 до η с использованием граничных условий при $\eta = 0$, деля на разность $u - m$ и затем дифференцируя по η, придем к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = \frac{(u-m)^2}{\eta^s}\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{y^{2s}\,u}{\eta^s}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{7}$$

Граничными условиями для него будут $\partial u/\partial\eta = 0$ при $\eta = 0$ и $u = m$ при $\eta = [(s+1)I_0]^{1/(s+1)}$.

Теперь определим с помощью (5)

$$v = (m-u)\left(\frac{y}{\eta}\right)^s\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{2u}{y^s}\int\limits_0^\eta \frac{y^{2s}\,(m-u)}{\eta_1^s\,u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta_1}\right)^2 d\eta_1. \tag{8}$$

Координата y выражается из (4) как

$$y = \left[(s+1)\int\limits_0^\eta \frac{\eta_1^s\,d\eta_1}{u\,(u-m)}\right]^{1/(s+1)}. \tag{9}$$

Таким образом, уравнения (7)—(9) определяют функции $u(\xi,\eta)$, $v(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ в области $\xi > \xi_0$, $0 \leqslant \eta \leqslant [(s+1)I_0]^{1/(s+1)} = \eta_\infty$. Следовательно, вместо задачи интегрирования системы уравнений (1) в бесконечной области получаем задачу для уравнения (7) в прямоугольнике с последующими квадратурами (8), (9). Заметим, что уравнения (7), (8) на концах $[0, \eta_\infty]$ имеют устранимые с помощью правила Лопиталя особенности. Из (7)—(9) очевидно следуют частные случаи $s = 0$ и $s = 1$.

3. Не задавая начального профиля u^0, укажем способ получения автомодельного решения в случае $m = 0$ при заданном I_0. Применим метод разделения переменных. Представив $u = f(\xi)\varphi(\eta)$ в (7), получаем

$$\frac{f'}{f^{4/(s+1)}} = \frac{\varphi}{\eta^s}\left(\frac{\bar{y}^{2s}}{\eta^s}\,\varphi\varphi'\right)' = -\omega^2, \tag{10}$$

где штрих означает дифференцирование по соответствующей переменной,

$$\bar{y} = \left[(s+1)\int\limits_0^\eta \frac{\eta_1^s\,d\eta_1}{\varphi^2}\right]^{1/(s+1)}, \tag{11}$$

постоянная ω будет интерпретироваться как собственное число (убывание функции $f(\xi)$ определяет знак перед ω^2). Уравнение для f из (10) интегрируется просто и дает при всех s, кроме $s = -1$ и $s = 3$,

$$f = \left[f_0^{(s-3)/(s+1)} + \frac{3-s}{s+1}\,\omega^2\,(\xi - \xi_0)\right]^{(s+1)/(s-3)}. \tag{12}$$

Исключительный случай $s = 3$ легко приводит к интегралу $f = f_0 \exp[-\omega^2(\xi - \xi_0)]$. Здесь f_0 — некоторое начальное значение f при

$\xi = \xi_0$. Константа ω^2 определяется в результате решения уравнения для φ из (10) с однородными граничными условиями $\varphi' = 0$ при $\eta = 0$, $\varphi = 0$ при $\eta = \eta_\infty$.

Нормируя функцию $\varphi(\eta)$ так, что $\varphi(0) = 1$, получим дополнительное условие для определения зависимости $\omega(I_0, s)$. Нетрудно убедиться, что введением новой переменной $\zeta = \omega\eta$ можно свести задачу нахождения ω и, следовательно, $\varphi(\eta)$ при фиксированном s к одному интегрированию уравнения для φ, положив в нем $\omega = 1$, с начальными значениями $\varphi(0) = 1$ и $\varphi'(0) = 0$. Интегрирование можно выполнить каким-нибудь численным методом с автоматическим выбором шага, интегрируя до тех пор, пока φ не приблизится к нулю с заданной степенью точности. Заметим, что особенность уравнения для $\varphi(\eta)$ при $\varphi = 0$ приводит к дроблению шага интегрирования вблизи конца отрезка и позволяет получать значения ω без экстраполяции. Указанным способом можно определить единственное значение ω при заданном s.

4. В практически интересных случаях $s = 0$ и $s = 1$ можно обойтись без численного интегрирования, так как соответствующие уравнения для $\varphi(\eta)$ имеют простые аналитические решения.

Получающееся из (10) при $s = 0$ уравнение $\varphi(\varphi\varphi')' + \omega^2 = 0$ дает решение в неявной форме

$$(1-\varphi)^{3/2} - 3(1-\varphi)^{1/2} + 3\cdot 2^{-1/2}\omega\eta = 0, \tag{13}$$

удовлетворяющее при $\omega = 2^{3/2}(3I_0)^{-1}$ граничным условиям $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = \varphi(I_0) = 0$. Решение кубического относительно $(1-\varphi)^{1/2}$ уравнения (13) может быть представлено в параметрическом виде

$$\varphi = 2\cos 2t/3 - 1, \quad \eta = I_0 \sin t, \quad t \in [0, \pi/2].$$

Далее, из (12) получаем

$$f = f_0\left[1 + \frac{8f_0^3}{3I_0^2}(\xi - \xi_0)\right]^{-1/3}.$$

Составляющую скорости v и расстояние y можно представить как

$$v = -\frac{4}{3}\frac{f^2}{I_0}\left[\sqrt{1-\varphi} + \varphi \ln\frac{1-\sqrt{1-\varphi}}{1+\sqrt{1-\varphi}}\right]; \quad y = \frac{3}{4}\frac{I_0}{f^2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\varphi}}{1-\sqrt{1-\varphi}}.$$

С помощью (10) — (12) и (8) при $s = 1$ нетрудно найти автомодельное решение в виде

$$u = f_0\left[1 + \frac{4f_0}{3I_0}(\xi - \xi_0)\right]^{-1}\left(1 - \frac{\eta^2}{2I_0}\right)^{2/3}$$

при $\omega = 2(3I_0)^{-1/2}$. Соответствующие выражения для v и y будут

$$v = 4(6I_0)^{-1/2} f(2\varphi^{1/2} - 1)(\varphi^{1/2} - \varphi)^{1/2}; \quad y = (6I_0)^{1/2} f^{-1}(\varphi^{-1/2} - 1)^{1/2}.$$

5. При $m \neq 0$ рассмотрим приближенное решение уравнения (7) в области больших значений ξ, где $u(\xi, \eta)$ и m мало разнятся. Положим $u = m + \tilde{u}$, считая $\tilde{u} \ll m$. Тогда, пренебрегая в правой части (7) членами более высокого порядка малости, чем сохраняемые, придем к уравнению

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi} = m\frac{\tilde{u}^2}{\eta^s}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\tilde{y}^{2s}}{\eta^s}\frac{d\tilde{u}}{\partial\eta}\right), \tilde{y}^{s+1} = \frac{s+1}{m}\int_0^{\eta}\frac{\eta_1^s\, d\eta_1}{\tilde{u}}. \tag{14}$$

Граничные условия для (14) совпадают с условиями для затопленной струи, т. е.

$$\partial\tilde{u}/\partial\eta = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \qquad \tilde{u} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_\infty. \tag{15}$$

Для решения автомодельной задачи (14), (15) также применим метод разделения переменных, т. е. будем искать решение $\tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi)\tilde{\varphi}(\eta)$. Для определения $\tilde{f}(\xi)$ получим уравнение

$$\tilde{f}' + (s+1)^{2s/(s+1)}\tilde{\omega}^2 \tilde{f}^{(s+3)/(s+1)} = 0,$$

интеграл которого дает

$$\tilde{f} = f_0[1 + 2(s+1)^{(s-1)/(s+1)}\tilde{\omega}^2 \tilde{f}_0^{\,2/(s+1)}(\xi - \xi_0)]^{-1/2(s+1)}.$$

Уравнение для $\tilde{\varphi}(\eta)$ получается в виде

$$\left[\left(\int_0^\eta \frac{\eta_1^s\, d\eta_1}{\tilde{\varphi}}\right)^{2s/(s+1)} \frac{\tilde{\varphi}'}{\eta^s}\right]' + m^{(s-1)/(s+10)}\tilde{\omega}^2 \frac{\eta^s}{\tilde{\varphi}} = 0.$$

Его решение, вообще говоря, можно получить численно путем, аналогичным указанному выше в п. 3. Однако введение новой переменной $\sigma = \int_0^\eta \frac{\eta_1^s d\eta_1}{\tilde{\varphi}}$, $\sigma \in [0, \infty)$, дает возможность представить решение $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\eta; I_0, s)$ в параметрической форме:

$$\tilde{\varphi}(\sigma) = \exp\left(-\frac{s+1}{2} m^{(s-1)/(s+1} \tilde{\omega}^2 \sigma^{2/(s+1)}\right),$$

$$\eta^{s+1}(\sigma) = (s+1)\int_0^\sigma \tilde{\varphi}\, d\sigma_1.$$

При этом $\tilde{\omega}$ определяется с помощью гамма-функции как

$$\tilde{\omega}^{s+1} = I_0^{-1}\left(\frac{s+1}{2} m\right)^{1/2(1-s)} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

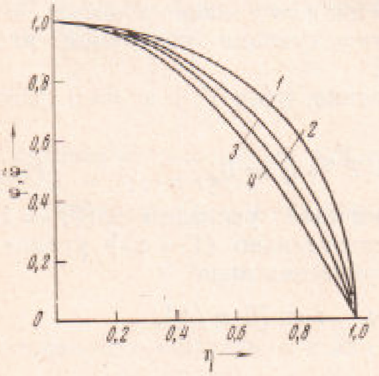

Рис. 1. Функции $\varphi(\bar{\eta}; s)$ и $\tilde{\varphi}(\bar{\eta}; s)$ автомодельных решений в плоскости ξ, η для $s = 0$ и $s = 1$, $\bar{\eta} = \eta / \eta_\infty$; *1* — $\varphi(\bar{\eta}; 0)$, *2* — $\varphi(\bar{\eta}; 1)$, *3* — $\tilde{\varphi}(\bar{\eta}; 0)$, *4* — $\tilde{\varphi}(\bar{\eta}; 1)$

Полученные результаты для $m \neq 0$, как и уравнения (7)—(9), легко перенести на случаи струи и следов в спутном потоке, когда $u - m < 0$.

Функции $\varphi(\eta)$ и $\tilde{\varphi}(\eta)$ для случаев $s = 0$ и $s = 1$ представлены на рис. 1. Возвращаясь в плоскость x, y, нетрудно убедиться в совпадении найденных автомодельных решений в плоскости ξ, η для $m = 0$ и $m \neq 0$ с известными в физической плоскости ([2]) при соответствующем определении величин f_0, $\tilde{f}_0$, ξ_0, I_0 и переходе к размерным координатам. Например, для затопленной струи-источника следует положить $\xi_0 = 0$, а $f_0 = \infty$.

Для численного решения неавтомодельных задач к уравнению (7) удобно применять конечно-разностные методы.

Поступило
25 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Гиневский, Теория турбулентных струй и следов, М., 1969. [2] Л. А. Вулис, В. П. Кашкаров, Теория струй вязкой жидкости, М., 1965. [3] L. Crocco, Atti di Gidonia, 17, № 7 (1939). [4] R. D. Mills, J. Fluid Mech., 33, Part 3, 591 (1968).