Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 513.88.1+517.948.32 *МАТЕМАТИКА*

В. В. БОРЗОВ

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ $W_p^{r_i}$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 23 XI 1970)

В работах [1, 2] были изучены кусочно-полиномиальные аппроксимации для функций классов С. Л. Соболева — Л. Н. Слободецкого W_p^r. В [2, 3] были указаны приложения этих результатов к оценке ε-энтропии единичного шара W_p^r в L_q и к получению асимптотики спектра эллиптических краевых задач в «весовых» пространствах $L_2(\rho)$ (без ограничений типа гладкости на соответствующую меру ρ). В настоящем сообщении мы распространяем указанный подход на случай анизотропных (см. [4]) классов $W_p^{\mathbf{r}}$. В качестве применений рассматриваем соответствующую задачу об энтропии и находим асимптотику спектра первой краевой задачи для полуэллиптического (или семиэллиптического, см. [5]) оператора в весовых пространствах.

1. Приведем необходимые определения и обозначения. При Q^m — единичный куб m-мерного эвклидова пространства $\mathbf{R}^m$; пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, причем $0 < r_i < \infty$, $i = 1, \ldots, m$, $[r_i]$ — целая часть r_i и $\beta_i = r_i - [r_i]$. Функция $f \in w_{p,x_i}^{r_i}$ (см. [4]), если для нее существует обобщенная производная порядка $[r_i]$ по x_i и конечен функционал $M_i(f, r_i, p, Q^m)$, причем M_i^p определяется при целых r_i первым, а при нецелых вторым из выражений

$$\| f_{x_i}^{(r_i)} \|_{L_p(Q^m)}^p, \qquad \int\limits_{Q_{(i)}^m} dx^{(i)} \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{|\Delta_i f^{([r_i])}|^p}{|x_i - y_i|^{1+p\beta_i}} dx_i\, dy_i.$$

Здесь $x^{(i)} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m)$; $Q_{(i)}^m$ — проекция куба Q^m на плоскость $x_i = 0$; наконец, $\Delta_i \varphi = \varphi(x^{(i)}, x_i) - \varphi(x^{(i)}, y_i)$. Пространство $W_p^{\mathbf{r}}(Q^m)$ есть пересечение классов $L_p(Q^m)$ и $w_{p,x_i}^{r_i}(Q^m)$, $i = 1, \ldots, m$. Норма в $W_p^{\mathbf{r}}(Q^m)$ определяется как сумма функционалов $M_i(f)$, $i = 1, \ldots, m$, и нормы f в $L_p(Q^m)$. Условимся обозначать $\omega = \sum\limits_{i=1}^m r_i^{-1}$ и при $p \leqslant \omega$ $q^* = (p^{-1} - \omega^{-1})^{-1}$.

Пусть Ξ — разбиение куба Q^m на конечное число $|\Xi|$ полуоткрытых прямоугольных параллелепипедов с ребрами, параллельными осям координат. Пусть функция $\psi(x)$ в каждом из параллелепипедов разбиения Ξ есть полином, степень которого по i-й координате строго меньше r_i, $i = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\Pi(\mathbf{r}, \Xi)$ линейное множество всех таких функций $\psi(x)$ и через $P_\Xi \equiv P_{\mathbf{r},\Xi}$ — линейный оператор ортогонального (в смысле $L_2(Q^m)$) проектирования на множество $\Pi(\mathbf{r}, \Xi)$.

Теорема 1. *Пусть $q \leqslant \infty$ при $p > \omega$ и $q < q^*$ при $p \leqslant \omega$. Тогда для любой функции $f \in W_p^{\mathbf{r}}(Q^m)$ и всякого натурального n существует такое разбиение Ξ, $|\Xi| \leqslant n$, что*

$$\| f - P_\Xi f \|_{L_q(Q^m)} \leqslant c n^{-\omega^{-1}} \sum_{i=1}^m M_i(f, r_i, p, Q^m), \quad c = c(\mathbf{r}, p, q, m).$$

Далее, пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ — ограниченное открытое множество, $\Gamma_1(\Omega)$ — класс конечных борелевских мер ρ, заданных на подмножествах Ω; положим $\|\rho\|_1 = \rho(\Omega)$. При $s > 1$ через Γ_s обозначим класс абсолютно непрерывных мер ρ, для которых $g(x) = d\rho / dx \in L_s(\Omega)$, причем положим $\|\rho\|_s = \|g\|_{L_s(\Omega)}$. Обозначим через $L_q(\Omega, \rho)$, $q \geqslant 1$, пространство L_q относительно меры ρ.

Теорема 2. *Пусть* $\|\rho\|_s = 1$, *где* $s = 1$ *при* $p > \omega$ *и* $s > q^*(q^* - q)^{-1}$ *при* $p \leqslant \omega$. *Для всякого натурального* n *найдется такое разбиение* Ξ, $|\Xi| \leqslant n$, *что для произвольной функции* $f \in W_p^{\mathbf{r}}(Q^m)$

$$\|f - P_\Xi f\|_{L_q(Q^m, \rho)} \leqslant cn^{-b} \sum_{i=1}^{m} M_i(f, r_i, p, Q^m), \tag{1}$$

где $b = q^{-1} - q^{*-1}$, *если* $p < q$, *и* $b = \omega^{-1}$, *если* $p \geqslant q$, *и константа* $c = c(\mathbf{r}, p, q, m)$ *не зависит от меры* ρ.

Теорема 3. *Если при* $p > \omega$ *мера* ρ *сингулярна, то правую часть неравенства* (1) *можно заменить на* $o(n^{-b})$.

Теоремы 1 и 2 являются обобщением теорем 3.1 — 3.4 статьи ([1]) на случай анизотропных классов $W_p^{\mathbf{r}}$. Теорема 3 для изотропного случая была получена автором в ([6]). Отметим, что разбиение Ξ в теореме 1 существенно зависит от функции f, а в теореме 2 не зависит от функции f, но зависит от меры ρ.

2. Доказательство теорем 1 и 2 опирается на следующую теорему. Рассмотрим неотрицательную, полуаддитивную снизу ([1]) функцию $J(\Delta)$ полуоткрытых m-мерных параллелепипедов $\Delta \subset Q^m$, которая может быть и сингулярной (в смысле ([6])). Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$, $\gamma_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$; через Δ_γ будем обозначать любой параллелепипед $\Delta \subset Q^m$, ребра которого параллельны осям координат и имеют длины $h^{\gamma_1}, \ldots, h^{\gamma_m}$, $0 < h \leqslant 1$. Пусть вектор δ, $\delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, фиксирован. Разбиение Ξ отнесем к классу R_δ, если для всех параллелепипедов Δ_γ разбиения Ξ выполняются неравенства $h^{\delta_i} \geqslant h^{\gamma_i} \geqslant 2^{-\delta_i} h^{\delta_i}$ (в разбиение $\Xi \in R_\delta$ могут входить кубы Δ_γ с разными γ). Рассмотрим функцию разбиений

$$G_a(\Xi) = \max_{\Delta \in \Xi} \mu(\Delta)^a J(\Delta),$$

где μ — мера Лебега, $a > 0$ — некоторое число.

Теорема 4. *Для заданного положительного вектора* δ *и всякого натурального* n *найдется такое разбиение* $\Xi_n \in R_\delta$, $|\Xi_n| \leqslant n$, *что*

$$G_a(\Xi_n) \leqslant cn^{-(1+a)} J(Q^m), \quad c = c(a, m, \delta), \tag{2}$$

где постоянная C *не зависит от функции* J. *Если функция* J *сингулярна, то последовательность разбиений* Ξ_n *можно выбрать так, что*

$$G_a(\Xi_n) = o(n^{-(1+a)}). \tag{3}$$

При доказательстве неравенства (2) используется метод статьи ([1]), а при доказательстве оценки (3) — соображения заметки ([6]). Отметим что в отличие от разбиений на кубы, рассматривавшихся в ([1, 2]), для наших целей необходимо рассматривать разбиения на конечное число параллелепипедов с заданным порядком (по h) отношений ребер. Задача существенно осложняется, если хотя бы одно из отношений δ_i / δ_1 иррационально.

3. Анализируя способ построения разбиений, применяемый при доказательстве теоремы 4, и пользуясь методом ([1]), можно получить оценку для ε-энтропии $\mathscr{H}_\varepsilon(W_p^{\mathbf{r}}, L_q)$ ([7]) единичного шара $W_p^{\mathbf{r}}$ в пространстве $L_q(Q^m)$.

Теорема 5. *Справедливо неравенство*

$$\mathscr{H}_\varepsilon(W_p^{\mathbf{r}}, L_q) \leqslant c\varepsilon^{-\omega}, \tag{4}$$

причем $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *для* $p > \omega$ *и* $1 \leqslant q < q^*$ *при* $p \leqslant \omega$.

Отметим, что порядок в оценке (4) является точным, по крайней мере, при $q=\infty$, ибо нетрудно получить такую же по порядку оценку снизу величины $\mathscr{H}_\varepsilon(W_p{}^r, L_\infty)$ с помощью системы функций, использованной в статье ([7]) для получения аналогичной оценки для ε-энтропии $\mathscr{H}_\varepsilon(C^\alpha, C)$.

4. Теоремы 2, 3 дают возможность изучить асимптотику спектра в пространствах $L_2(\rho)$ для широкого класса полуэллиптических операторов с постоянными коэффициентами. Этим обобщаются некоторые результаты ([3]), где подробно рассмотрен случай полигармонического оператора. Пусть α, $\mathbf{r}$ — мультииндексы, причем $r_j>0$, $j=1,\ldots,m$, и пусть $|\alpha:2\mathbf{r}|=$ $=\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i/2r_i$; как обычно $D_j=-i\,\partial/\partial x_j$, $D_\alpha=D_1{}^{\alpha_1}\ldots D_m{}^{\alpha_m}$. Рассмотрим дифференциальное выражение вида

$$P(D)=\sum_{|\alpha:2\mathbf{r}|=1} a_\alpha D^\alpha$$

и предположим, что $P(\xi)>0$ для всех вещественных $\xi\in\mathbf{R}^m\setminus\{0\}$. Пусть Ω — произвольная ограниченная область; обозначим через $\mathring{W}_2{}^r(\Omega)$ замыкание множества $C_0{}^\infty(\Omega)$ по метрике пространства $\mathring{W}_2{}^r(\Omega)$. На множестве $C_0{}^\infty(\Omega)$ введем скалярное произведение $[u,v]=\int\bar{v}P(D)u\,dx$. Нетрудно убедиться, что соответствующая метрика эквивалентна метрике пространства $W_2{}^r(\Omega)$; билинейная форма $[u,v]$ по непрерывности распространяется на $\mathring{W}_2{}^r(\Omega)$. Пусть $\rho\in\Gamma_s(\Omega)$, где $s=1$ при $\omega<2$ и $2s>\omega$ при $\omega\geqslant 2$. Поставим задачу об отыскании последовательных максимумов λ_n отношения квадратичных форм

$$\int_\Omega |u|^2\rho(dx)/[u,u]\qquad (u\in\mathring{W}{}_2^r(\Omega)).\tag{5}$$

Это соответствует (ср. ([3])) «правильному» обобщению задачи на спектр для уравнения $P(D)u(x)=\lambda^{-1}g(x)u(x)$ при первом краевом условии.

Теорема 6. *Пусть $\rho\in\Gamma_s(\Omega)$, где $s=1$ при $\omega<2$ и $2s>\omega$ при $\omega\geqslant 2$. Последовательные максимумы λ_n отношения* (5) *удовлетворяют неравенству*

$$\lambda_n\leqslant cn^{-2\omega^{-1}}\|\rho\|_s,\tag{6}$$

причем постоянная c не зависит от меры ρ. Если $\omega<2$ и мера ρ сингулярна, то $\lambda_n=o(n^{-2\omega^{-1}})$.

Теорема 7. *В условиях теоремы 6 при $n\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\lambda_n\sim\left(\frac{A}{n}\right)^{2\omega^{-1}},\quad A=(2\pi)^{-m}\int\limits_{P(\xi)<1}d\xi\int\limits_\Omega g(x)^{\omega/2}\,dx,\ \ g(x)=\frac{d\rho}{dx}.$$

Теорема 6 вытекает из теорем 2, 3. Теорема 7 в случае абсолютно непрерывной меры с гладкой плотностью $g(x)\geqslant c_0>0$ легко получается из результатов Броудера ([8]). Переход к общему случаю производится на основании оценки (6); при этом используется одно утверждение из теории возмущений, приведенное в ([3]). Теорема 7 допускает обобщение (ср. ([3])) на случай незнакоопределенных мер (зарядов).

Автор искренне благодарен М. Ш. Бирману и М. З. Соломяку за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
14 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, ДАН, 171, № 5 (1966). [2] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Матем. сборн., 73, № 3 (1967). [3] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, 4, в. 4 (1970). [4] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [5] Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные уравнения с частными производными, М., 1965. [6] В. В. Борзов, Сборн. Проблемы математической физики, в. 4, Л., 1970. [7] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, Усп. матем. наук, 14, 2 (86) (1959). [8] F. Browder, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 43, № 3 (1957).