Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 517.948 *МАТЕМАТИКА*

Р. Э. ВАЛЬСКИЙ

О МЕРАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ В C^n

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 17 XI 1970)

1. Разбиение ортогональных мер на шаре в C^n. Известно, что задача о равномерной аппроксимации рациональными функциями на компакте X в C^1 имеет локальный характер ([1]). Двойственный факт состоит в том, что всякая мера на X, ортогональная рациональным функциям, разбивается в сумму ортогональных мер со сколь угодно малыми носителями. Такое разбиение легко строится с помощью леммы Гофмана, которая по данной ортогональной мере указывает целый класс ортогональных мер ([2]).

Ниже лемма Гофмана и разбиение ортогональных мер переносятся на случай шара $\mathscr{D}^n$ в C^n. Используются следующие обозначения: $A(\mathscr{D}^n)$ — пространство непрерывных функций на $\mathscr{D}^n$, аналитических внутри $\mathscr{D}^n$ с sup-нормой; $A^\Delta(\mathscr{D}^n)$ $(A^\perp(\mathscr{D}^n))$ — пространство мер μ, сосредоточенных на $\mathscr{D}^n$ (на $\partial\mathscr{D}^n$) и ортогональных к $A(\mathscr{D}^n)$, с нормой $\int|\mu|$; $\mathscr{D}^n = \{z \in C^n;\ |z| \leqslant 1\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mu \in A^\Delta(\mathscr{D}^n)$, φ — *функция класса* C^∞ *в* C^1, K — *ее замкнутый носитель*, $\pi((z_1, \ldots, z_n)) = z_1$.

Тогда существует мера ν, *сосредоточенная на* $\operatorname{Int}\mathscr{D}^n \cap \pi^{-1}(K)$ *и такая, что* $(\varphi\circ\pi)\mu + \nu \in A^\Delta$.

Доказательство. Для $t \in C^1$, $|t| < 1$, положим $S_t = \{z \in \mathscr{D}^n: \pi(z) = t\}$. При $t = 0$ определена естественная проекция T_0 из $\mathscr{D}^n$ на S_0: $T_0((z_1, \ldots, z_n)) = (0, z_2, \ldots, z_n)$. Как известно, существует биголоморфное отображение шара $\mathscr{D}^n$ на себя, переводящее S_t в S_0. Возьмем такое отображение U_t; тогда $T_t = U_t^{-1}\circ T_0 \circ U_t$ — проекция из $\mathscr{D}^n$ на S_t. Можно дополнительно считать, что отображения U_t выбраны так, что $T_{t'}$ равномерно сходится к T_t, когда $t' \to t$.

Заметим, что для почти всех (по мере Лебега) $t \in C^1$, $|t| < 1$, будем иметь $\int(\pi(z) - t)^{-1}|\mu| < \infty$. Для всех таких t можно определить меру ν_t на S_t равенством $\int f\nu_t = \int f\circ T_t\cdot(\pi(z) - t)^{-1}\mu$, $f \in C(S_t)$. Так как T_t непрерывно зависит от t, то определена мера ν на $\mathscr{D}^n$ таким образом: $\int f\nu = \int\limits_{|t|<1} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar t}\left(\int f\nu_t\right) dt \wedge d\bar t \ (f \in C(\mathscr{D}^n))$. Из построения T_t легко следует, что мера ν_t сосредоточена на $\operatorname{Int}\mathscr{D}^n \wedge S_t$, а непрерывность T_t по t дает требуемое о носителе ν.

Докажем теперь, что $(\varphi\circ\pi)\mu + \nu \in A^\Delta$. Если f аналитична в окрестности $\mathscr{D}^n$, то $(f\circ T_t - f)(\pi(z) - t)^{-1} \in A(\mathscr{D}^n)$ и тем самым

$$\int f\nu_t = \int(\pi(z) - t)^{-1} f\mu \tag{1}$$

для таких f. Предельный переход дает (1) для всех $f \in A(\mathscr{D}^n)$. Кроме того, из условия $\mu \in A^\Delta$ вытекает, что $\int(\pi(z) - t)^{-1} f\mu = 0$, если $|t| > 1$. Итак, условие $(\varphi\circ\pi)\mu + \nu \in A^\Delta$ равносильно тому, что для всех $f \in$

$\in A(\mathscr{D}^n)$

$$\int (\varphi \circ \pi) f\mu + \int \frac{\partial \varphi}{\partial \bar t}\left(\int (\pi(z) - t)^{-1} f\mu\right) dt \wedge d\bar t = 0. \qquad (2)$$

Определим меру μ_f в $\mathbf{C}^1$ равенством $\int g\mu_f = \int (g \circ \pi) f\mu$, g — непрерывная функция в $\mathbf{C}^1$. Тогда (2) равносильно тому, что $\int \nu = 0$, где $\tilde\nu = \varphi\mu_f + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar t}\left(\int (u-t)^{-1}\mu_f(u)\right) dt \wedge d\bar t$. Но μ_f ортогональна полиномам и, в силу упомянутой леммы Гофмана ([2]), $\tilde\nu$ обладает тем же свойством, в частности $\int \tilde\nu = 0$. Теорема доказана.

Заметим теперь, что если $1 = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i$ — разбиение единицы в $\mathbf{C}^1$ и меры ν_i построены по функциям φ_i как в доказательстве теоремы 1, то $\mu = \sum_{i=1}^{k} [(\varphi_i \circ \pi)\mu + \nu_i]$. Из этого замечания легко следует

Теорема 2. *Пусть* $\delta > 0$, $\mu \in A^\Delta(\mathscr{D}^n)$.

Тогда $\mu = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, *где* $\mu_i \in A^\Delta(\mathscr{D}^n)$ *и носитель меры* μ_i *имеет диаметр* $\leqslant \delta$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Для меры $\mu \in A^\perp$ можно получить разбиение в пределах $A^\perp$, если исправить подходящим образом разбиение из теоремы 2. Более того, используя близкий вариант леммы Гофмана, можно показать, что справедлива

Теорема 2′. *Пусть* $\mu \in A^\perp(\mathscr{D}^n)$, $\delta > 0$.

Тогда $\mu = \mu_0 + \sum_{i=1}^{k} \mu_i$, *где* $\mu_0, \ldots, \mu_k \in A^\perp(\mathscr{D}^n)$, μ_0 *абсолютно непрерывна относительно меры Лебега* σ, *диаметры носителей мер* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *не превосходят* δ *и сингулярные (относительно* σ*) части мер* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *попарно взаимно сингулярны.*

2. Связь между ортогональными мерами и L-мерами. Пусть $\mathscr{O}$ — область в $\mathbf{C}^n$ с гладкой границей. Следуя Г. М. Хенкину ([3]), будем называть меру μ, сосредоточенную на $\partial\mathscr{O}$, L-мерой, если для любой ограниченной последовательности $\{f_n \in A(\mathscr{O})\}$ из $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для всех $x \in \mathscr{O}$ вытекает $\int f_n\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Легко показать, что это равносильно существованию последовательности мер $\{\mu_n\}$, сосредоточенных на $\mathscr{O}$, для которой $\|\mu - \mu_n\|_{A^*(\bar{\mathscr{O}})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Так как граница области $\mathscr{O}$ гладкая, то всякий функционал, определяемый на $A(\bar{\mathscr{O}})$ мерой, сосредоточенной на $\mathscr{O}$, может быть вычислен мерой на $\partial\mathscr{O}$, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега σ на $\partial\mathscr{O}$. (Множество таких мер обозначим через $L(\sigma)$.) Следовательно, в предыдущем замечании меры μ_n можно брать абсолютно непрерывными относительно σ. Оказывается, что для широкого класса областей можно обойтись без приближения.

Лемма. *Пусть* $\mathscr{O}$ *— область с гладкой границей, и всякая ограниченная аналитическая функция* f *на* $\mathscr{O}$ *может быть поточечно приближена последовательностью* $\{f_n \in A(\bar{\mathscr{O}})\}$, *для которой* $\|f_n\| \leqslant \sup_{x\in\mathscr{O}} |f(x)| = \|f\|_\infty$, $n = 1, \ldots$ *(например,* $\mathscr{O}$ *— звездная область).*

Тогда для любой меры $\mu \in L(\sigma)$ *и* $\varepsilon > 0$ *найдется мера* $\bar\mu \in L(\sigma)$, *определяющая на* $A(\bar{\mathscr{O}})$ *тот же функционал (т. е.* $\mu - \bar\mu \in A^\perp(\bar{\mathscr{O}})$*) и такая, что* $\|\bar\mu\| \leqslant \|\mu\|_{A^*(\bar{\mathscr{O}})} + \varepsilon$.

Доказательство. Пусть H^∞ — слабое замыкание $A(\bar{\mathscr{O}})$ в $L^\infty(\sigma)$. Отображение, переводящее функцию $f \in H^\infty$ в ее интеграл Пуассона, изометрично, поэтому из условия леммы получаем, что каждая функция $f \in H^\infty$ есть слабый предел последовательности из $A(\overline{\mathcal{O}})$, ограниченной по норме константой $\|f\|_\infty$. Следовательно, нормы функционалов, порожденных мерой μ на $A(\overline{\mathcal{O}})$ и H^∞, совпадают, т. е.

$$\|\mu\|_{A^*(\overline{\mathcal{O}})} = \inf_{\nu \in A^\perp \cap L(\sigma)} \|\mu - \nu\|,$$

что равносильно утверждению леммы.

Следствие. *Если μ — L-мера, $\varepsilon < 0$, то найдется мера $\nu \in L(\sigma)$ такая, что $\mu - \nu \in A^\perp$ и $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|_{A^*(\overline{\mathcal{O}})} + \varepsilon$.*

Отсюда сразу получаются некоторые свойства L-мер и ортогональных мер.

Теорема 3. *Если область $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям леммы, то класс L-мер совпадает с $L(\sigma) + A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$.*

Пусть μ_a и μ_s обозначают абсолютно непрерывную и сингулярную части меры μ относительно σ, $A_s^\perp = \{\mu_s\colon \mu \in A(\overline{\mathcal{O}})\}$. При тех же предположениях относительно $\mathcal{O}$ справедлива

Теорема 4. *Пусть $\mu \in A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$, $\varepsilon > 0$.*

Тогда найдется мера $\nu \in A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$ такая, что $\nu_s = \mu_s$ и $\|\nu_a\| \leqslant \|\mu_s\|_{A^*(\overline{\mathcal{O}})} + \varepsilon$. Следовательно, $A_s^\perp(\overline{\mathcal{O}})$ замкнуто в пространстве мер.

Теорема 3 позволяет перенести на $A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$ известное свойство L-мер ([3]).

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{O}$ — строго псевдовыпуклая область с границей класса C^3, удовлетворяющая условиям леммы. Если $\mu \in A_s^\perp(\overline{\mathcal{O}})$, а ν абсолютно непрерывна относительно μ, то $\nu \in A_s^\perp(\overline{\mathcal{O}})$.*

Замечание. Если $\mathcal{O}$ — шар, то это утверждение можно легко получить из замкнутости $A_s^\perp(\overline{\mathcal{O}})$ и теоремы 1.

3. Применения. С помощью теоремы 5 можно получить некоторые сведения о пространстве $A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$. Назовем неотрицательную меру μ на $\partial\mathcal{O}$ представляющей, если существует точка $x \in \overline{\mathcal{O}}$ такая, что $f(x) = \int f\mu$ $(f \in A(\overline{\mathcal{O}}))$. Мера $\mu \in A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$ называется вполне сингулярной, если она сингулярна с каждой представляющей мерой. В ([5]) доказана обобщенная теорема Риссов: любая мера $\mu \in A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$ представима в виде $\mu = \mu_0 + \sum_{i=1}^\infty \mu_i$, где μ_0 — вполне сингулярна, $\mu_i \in A^\perp$ и абсолютно непрерывна относительно некоторой представляющей меры $(i = 1, \ldots)$, причем μ_0 единственна.

Теорема 6. *Если $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям теоремы 5, то в $A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$ нет ненулевых вполне сингулярных мер.*

Доказательство. Пусть μ — вполне сингулярная мера, $f \in L_1(\mu)$. По теореме 5 найдется $\nu \in A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$, для которой $\nu_s = f\mu$. Применяя к ν обобщенную теорему Риссов, получим, что $f\mu \in A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$. Так как f произвольна, то $\mu = 0$.

Известно, что каждое замкнутое множество нулевой меры на окружности является множеством особенностей неотрицательной гармонической функции в круге. Докажем аналог этого факта для областей в $\mathbf{C}^n$.

Теорема 7. *Пусть $\mathcal{O}$ — область с границей класса C^3, строго псевдовыпуклая, звездная относительно точки $0 \in \mathcal{O}$, E — замкнутое подмножество $\partial\mathcal{O}$.*

Тогда следующие условия равносильны:

1) *$|\mu|(E) = 0$ для всякой меры $\mu \in A^\perp(\overline{\mathcal{O}})$;*

2) *$A|E = \{f|E\colon f \in A(\overline{\mathcal{O}})\} = C(E)$ и существует функция $f \in A(\mathcal{O})$ такая, что $f(x) = 1$ $(x \in E)$, $|f(x)| < 1$ $(x \in \overline{\mathcal{O}} \setminus E)$;*

3) *существует функция $g \in A(\overline{\mathcal{O}})$ такая, что $g^{-1}(0) = E$;*

4) *существует аналитическая функция h, определенная в $\mathcal{O}$, и такая, что* $\operatorname{Re} h \geqslant 0$ *и* $\operatorname{Re} h(x) \to \infty$, *если* $x \to x_0 \in E$.

Доказательство. Эквивалентность 1) и 2) см. ([4]). 2) $\to$ 3) и 3) $\to$ 4) очевидно. 4) $\to$ 1). Пусть $\mu \in A^{\perp}(\overline{\mathcal{O}})$. Положим $\nu(E') = |\mu|(E' \cap E)$ (E' — борелевское множество). По теореме 5 найдется мера $\tilde{\mu} \in A^{\perp}(\overline{\mathcal{O}})$ такая, что $\tilde{\mu}_s = \nu$. Пусть ψ — конформное отображение правой полуплоскости на круг $\{z\colon |z - {}^1/_2| < {}^1/_2\}$, $\psi(\infty) = 1$, $G = \psi \circ h$. Пусть $\tilde{G} \in L^\infty(\sigma)$ — граничные значения функции G, тогда $|\tilde{G}(x)| < 1$ почти везде относительно σ. Положим $G_\varepsilon(z) = G((1-\varepsilon)z)$, $z \in \overline{\mathcal{O}}$. Тогда $G_\varepsilon^k \in A(\overline{\mathcal{O}})$ и $G_\varepsilon^k \tilde{\mu} = G_\varepsilon^k \tilde{\mu}_a + (G_\varepsilon^k|E)\nu \in A^{\perp}(\overline{\mathcal{O}})$. Переходя к пределу по ε, получим $\tilde{G}^k \tilde{\mu}_a + \nu \in A^{\perp}(\overline{\mathcal{O}})$. Предельный переход по k дает $\nu \in A^{\perp}(\overline{\mathcal{O}})$, откуда $\nu = 0$, так как ν неотрицательна.

Замечание. Все доказанные теоремы, кроме теорем 2′ и 6, имеют аналоги для полицилиндра (при этом под границей надо понимать шиловскую границу — тор). В частности, аналог теоремы 7 дает возможность получить классы нуль-множеств ортогональных мер на торе, указанные Форелли ([6]). Утверждение 3) $\to$ 1) для этого случая доказано Стоуном ([7]).

Результаты, близкие к нашим, получены Г. М. Хенкиным, в частности, он дал другие доказательства теорем 3,6.

Автор благодарит Л. А. Айзенберга и Г. М. Хенкина за полезные замечания и внимание к работе.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
21 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Bishop, Pacific J. Math., 8, № 1, 29 (1958). [2] L. Zalcman, Notes in Mathematics, 50, Berlin, 1968. [3] Г. М. Хенкин, Матем. сборн., 78, № 4, 611 (1969). [4] T. Gamelin, Transactions of Am. Math. Soc., 112, № 2, 278 (1964). [5] H. König, G. L. Seever, Duke Math. J., 36, № 4, 791 (1969). [6] F. Forelli, J. Math. and Mech., 17, № 11, 1073 (1968). [7] E. L. Stout, Function Algebras (Proc. of Intern. Symp. on Function Algebras), 1966, p. 6.