Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 531.314:517.946:534.001 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Е. В. ВЕНИЦИАНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР УСРЕДНЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН С ДИСПЕРСИЕЙ И МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 4 XII 1970)

При исследовании нелинейных волновых процессов с дисперсией представляют интерес предельные случаи, когда удается получить достаточно общие результаты асимптотического характера. В работах Уитема [1,2] был сформулирован подход к исследованию волновых процессов в консервативных системах, когда изменения амплитуды a, частоты ω и других параметров можно считать малыми на расстояниях порядка длины волны и за время порядка периода колебаний, что идейно сближает этот метод «адиабатического приближения» с асимптотическим методом Боголюбова — Крылова в теории нелинейных колебаний [3]. Уитемом был предложен метод получения дисперсионной системы, управляющий изменениями $a, \omega, \ldots$, из вариационного принципа, примененного к соответствующим образом усредненному лагранжиану; Люком была сделана попытка [4] установить асимптотический характер этого приближения.

Ниже показано для более общего случая дисперсионных систем с малой диссипацией, что «адиабатическое приближение» соответствует первому члену в асимптотическом представлении волнового решения. Установлено, что дисперсионная система может быть получена из соответствующим образом усредненного вариационного уравнения в общей форме [5], что позволяет ввести в рассмотрение и неконсервативные системы.

Рассмотрим уравнение Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial L}{\partial u}=\varepsilon f(u,\ u_t,\ u_x), \tag{1}$$

следующее из вариационного уравнения [5]

$$\delta\int_V L(u,\ u_t,\ u_x)\,dx\,dt+\delta W+\delta W^*=0,\quad \delta W^*=\int Q_{(u)}\delta u\,dx\,dt,\quad Q_{(u)}=\varepsilon f,$$

где лагранжиан L интегрируется по односвязной области $V_0\{t, x\}$ и варьируется функция $u=u(t, x)$, а δW определяется, если заданы L и δW^*; ε — малый положительный параметр.

Рассмотрим такие L, которые допускают решения (1) с $\varepsilon=0$ в виде стационарной волны $u=U(\vartheta_0,\ a_0)$, где $\vartheta_0=k_0x_0-\omega_0t$, a_0 — амплитуда (k_0, ω_0, a_0 — постоянные). Решение U находится из уравнения, следующего из (1):

$$U_{\vartheta\vartheta}(\omega_0^2L_{22}-2\omega_0k_0L_{23}+k_0^2L_{33})+U_\vartheta(-\omega_0L_{12}+k_0L_{13})-L_1=0 \tag{2}$$

(здесь и далее нижние индексы 1, 2, 3 у L означают соответственно производные по u, u_t, u_x). Амплитуда a_0 связана с первым интегралом:

$$\tfrac{1}{2}a_0^2=U_\vartheta(-\omega_0L_2+k_0L_3)-L. \tag{3}$$

Допустим, что выполнено достаточное условие разрешимости (3) по U_ϑ:

$$\Omega\equiv\omega_0^2L_{22}-2\omega_0k_0L_{23}+k_0^2L_{33}\neq0, \tag{4}$$

тогда $U_\vartheta = F(U, \omega_0, k_0, a_0^2)$, и если при определенных значениях a_0^2 F допускает по крайней мере два корня a_1 и a_2 $(a_1 < a_2)$, то общее решение легко записать в квадратурах. Нормируя U так, чтобы за полный период ϑ изменялась на 2π, получим дисперсионное соотношение между ω_0, k_0, a_0^2

$$\pi = \int_{a_1}^{a_2} \frac{dv}{F(v, \omega_0, k_0, a_0^2)}. \tag{5}$$

Рассмотрим процессы, характеризующиеся медленным изменением a, k, ω по t, x. Введем «медленные» переменные $T = \varepsilon(t)$, $X = \varepsilon x$ и положим, что

$$u = \sum_{m=0} \varepsilon^m U^{(m)}(a, \vartheta); \tag{6}$$

$$a_t = \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} A^{(m+1)}(T, X); \quad a_x = \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} B^{(m+1)}{}_t(T, X); \tag{7}$$

$$\vartheta_t = -\sum_{m=0} \varepsilon^m \omega^{(m)}(T, X); \quad \vartheta_x = \sum_{m=0} \varepsilon^m k^{(m)}(T, X). \tag{7'}$$

Заметим, что разложение можно вести и по малому параметру, связанному с граничными условиями, если он больше ε, и влиянием диссипации на изменение a, ϑ_t, ϑ_x можно пренебречь. Получаемая при этом система дисперсионных уравнений та же. Здесь не исследуется вопрос о сходимости по ε: рассматривается решение, имеющее наперед заданную точность по ε.

Вычисляя по (6, 7) производные от u и подставляя в (1), приравниваем выражения при одинаковых степенях ε.

Получена система для $U^{(0)}, U^{(1)}, \ldots, U^{(N)}$:

$$U^{(0)}_{\vartheta\vartheta}(\omega^{(0)2} L_{22} - 2\omega^{(0)} k^{(0)} L_{23} + k^{(0)2} L_{33}) + U^{(0)}_\vartheta(-\omega^{(0)} L_{12} + k^{(0)} L_{13}) - L_1 = 0; \tag{8}$$

$$U^{(1)}_{\vartheta\vartheta}(\omega^{(0)2} L_{22} - 2\omega^{(0)} k^{(0)} L_{23} + k^{(0)2} L_{33}) + D_1 U^{(1)}_\vartheta + D_2 U^{(1)} = f^{(1)} - M^{(1)}. \tag{9}$$

Коэффициенты D_i зависят от $U^{(0)}, U^{(0)}_\vartheta, U^{(0)}_{\vartheta\vartheta}, \omega^{(0)}, k^{(0)}$. Кроме того,

$$f^{(1)} = f(U^{(0)}, -\omega^{(0)} U^{(0)}_\vartheta, k^{(0)} U^{(0)}_\vartheta), \tag{10}$$

а через $M^{(1)}$ обозначен многочлен, содержащий $U^{(0)}$, $\omega^{(0)}$, $k^{(0)}$ с их производными, а также $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $\omega^{(1)}$, $k^{(1)}$. Производные по L, входящие в D_i и $M^{(1)}$, зависят от той же группы переменных, что и $f^{(1)}$ в (10).

При $N > 1$ уравнение для $U^{(N)}$ находится из равенства

$$\left[\mathfrak{M}_{z_\alpha z_\beta \ldots z_\gamma} \frac{dz_\alpha}{d\varepsilon} \frac{dz_\beta}{d\varepsilon} \cdots \frac{dz_\gamma}{d\varepsilon} + \ldots + \mathfrak{M}_{z_i} \frac{d^N z_i}{d\varepsilon^N}\right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{d^N(\varepsilon f)}{d\varepsilon^N}\right]_{\varepsilon=0}, \tag{11}$$

где через $\mathfrak{M}(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}) \equiv \mathfrak{M}(z_1, \ldots, z_6)$ обозначена левая часть (1) после подстановки (6, 7). Выделяя члены с $U^{(N)}$, очевидно, содержащиеся только в последнем члене в левой части (11), можем получить уравнение

$$U^{(N)}_{\vartheta\vartheta}(\omega^{(0)2} L_{22} - 2\omega^{(0)} k^{(0)2} L_{23} + k^{(0)2} L_{33}) + D_1 U^{(N)}_\vartheta + D_2 U^{(N)} = f^{(N)} - M^{(N)}, \tag{12}$$

где $M^{(N)}$ зависит от $U^{(0)}, \ldots, U^{(N-1)}, \omega^{(0)}, \ldots, \omega^{(N)}, \ldots, B^{(1)}, \ldots, B^{(N)}$, а $f^{(N)}$ — правая часть (11).

В уравнениях (8, 9, 12) зависимость от T, X параметрическая, поэтому решение (8) по форме совпадает с (5), так как (8) и (2) одинаковы. Дисперсионное соотношение между $\omega^{(0)}$, $k^{(0)}$, a^2 дается уравнением (6). Заметим, что $\omega^{(0)}$, $k^{(0)}$, a^2 зависят от T, X.

Частными решениями (9), (12) с первыми частями, приравненными нулю, являются $U_a^{(0)}$ и $U_\vartheta^{(0)}$. Эти решения образуют фундаментальную систему, поскольку их вронскиан равен a/Ω (см. (4)). Поэтому общее решение (12) можем записать в виде

$$U^{(N)} = C_0^{(N)} U_\vartheta^{(0)} + D_0^{(N)} U_a^{(0)} - a U_\vartheta^{(0)} \int_0^\vartheta U_a^{(0)} (f^{(N)} - M^{(N)})\, d\vartheta + \\ + a U_a^{(0)} \int_0^\vartheta U_\vartheta^{(0)} (f^{(N)} - M^{(N)})\, d\vartheta, \tag{13}$$

где $C_0^{(N)}$ и $D_0^{(N)}$ — постоянные интегрирования.

Для периодичности $U^{(N)}$ следует наложить условие отсутствия секулярных членов в (13); получим 2 уравнения:

$$\int_0^{2\pi} (f^{(N)} - M^{(N)})\, U_a^{(0)}\, d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} (f^{(N)} - M^{(N)})\, U_\vartheta^{(0)}\, d\vartheta = 0, \tag{14}$$

которые вместе с тривиальными соотношениями

$$\omega_X^{(N)} + k_T^{(N)} = 0, \quad A_X^{(N)} - B_T^{(N)} = 0, \quad a_T = \sum_0^{N-1} \varepsilon^m A^{(m+1)}$$

образуют замкнутую систему для $A^{(N)}, B^{(N)}, \omega^{(N)}, k^{(N)}$.

Условия на $C_0^{(N)}, D_0^{(N)}$ накладываются из дополнительных соображений, поскольку задача определения выражений (7) содержит некоторый произвол (см. ниже).

Рассмотрим теперь усредненное вариационное уравнение, взяв лагранжиан $\tilde{L}$ и $\delta\tilde{W}^*$ в виде

$$\tilde{L} = \mathcal{L}(a, a_t, a_x, \vartheta_t, \vartheta_x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L\,(U^{(0)}, U_a^{(0)} a_t + U_\vartheta^{(0)} \vartheta_t, U_a^{(0)} a_x + U_\vartheta^{(0)} \vartheta_x)\, d\vartheta, \\ \delta W^* = \int (Q_{(a)}\, \delta a + Q_{(\vartheta)}\, \delta\vartheta)\, dx\, dt. \tag{15}$$

О получении усредненных сил $Q_{(a)}$ и $Q_{(\vartheta)}$ см. (19). Запишем уравнения Эйлера при варьировании ϑ и a:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta_x}\right) = -Q_{(\vartheta)}; \tag{16}$$

$$\mathcal{L}_a - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_x}\right) = -Q_{(a)}. \tag{17}$$

Обозначив левые части в (16, 17) как $G_{(\vartheta)}$ и $G_{(a)}$, можно показать, что дисперсионные уравнения (14) следуют из

$$\frac{d^N}{d\varepsilon^N}\{G_{(\vartheta)} + Q_{(\vartheta)}\}_{\varepsilon=0} = 0, \quad \frac{d^N}{d\varepsilon^N}\{G_{(a)} + Q_{(a)}\}_{\varepsilon=0} = 0. \tag{18}$$

При этом если на $C_0^{(N-1)}$ и $D_0^{(N-1)}$ наложены условия

$$\int_0^{2\pi} S^{(N)} U_a^{(0)}\, d\vartheta = 0, \quad \int_0^{2\pi} S^{(N)} U_\vartheta^{(0)}\, d\vartheta = 0,$$

$$S^{(N)} \equiv M^{(N)} - \frac{d^N}{d\varepsilon^N}\left[L_1 - \vartheta_t \frac{\partial L_2}{\partial \vartheta} - \vartheta_x \frac{\partial L_3}{\partial \vartheta} - \frac{\partial L_2}{\partial t} - \frac{\partial L_3}{\partial x}\right]_{\varepsilon=0},$$

а обобщенные силы в δW^* взяты в виде

$$Q_{(a)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1} \varepsilon^m f^{(m)} U_a^{(0)} d\vartheta, \quad Q_{(\vartheta)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1} \varepsilon^m f^{(m)} U_\vartheta^{(0)} d\vartheta, \tag{19}$$

то уравнения (18) совпадают с (14).

В выражение для $f^{(N)}$ входят величины с индексами до $(N-1)$ включительно, в том числе и $U^{(N-1)}$. Следовательно, для последовательного решения уравнений Эйлера (16) и (17) необходимо знание решений (13) уравнений, следующих из применения асимптотических представлений (6, 7) к исходному уравнению (1).

Рассмотрим первое после стационарного приближение. Поскольку в дисперсионном уравнении (16) содержатся члены только порядка ε, то достаточно взять $\mathscr{L}$ с точностью до членов порядка ε, т. е.

$$\mathscr{L}^{(0)}(k, \omega, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L\,[U^{(0)}(a, \vartheta), -\omega U^{(0)}(a, \vartheta), kU^{(0)}(a, \vartheta)]\, d\vartheta. \tag{20}$$

Следовательно, уравнения Эйлера примут вид

$$\mathscr{L}_a^{(0)} = 0, \text{ или } \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} \oint \frac{\partial L}{\partial U_\vartheta^{(0)}} dU^{(0)} - a = 0; \tag{21}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{L}_\omega^{(0)}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathscr{L}_k^{(0)}) = \varepsilon \int_0^{2\pi} f\,[U^{(0)}, -\omega U^{(0)}, kU^{(0)}]\, U_\vartheta^{(0)} d\vartheta. \tag{22}$$

Известно ([6]), что для периодических решений интеграл в (21) равен $\frac{1}{2\pi} Ta$, где T — период колебаний. Следовательно, дисперсионное уравнение (21) эквивалентно условию $T = 2\pi$, т. е. дисперсионному соотношению (5).

Для консервативных систем ($f \equiv 0$) для некоторых случаев Уитемом ([1, 2]) были получены дисперсионные уравнения, соответствующие (21, 22).

Для построения $\mathscr{L}^{(0)}$ необходимо знание стационарного решения U, что для нелинейных систем приводит к сложным дисперсионным уравнениям. В случае малых, но конечных амплитуд, когда существенны нелинейные эффекты, удобно в качестве усредняющей функции взять отрезок ряда Фурье. Для построения дисперсионных уравнений в качестве варьируемых функций следует брать коэффициенты Фурье.

Исследование дисперсионной системы (21, 22) позволяет для систем с указанными выше свойствами найти асимптотические решения, например, типа автоколебаний, и написать условия на скачках ([7]), исходя из вариационного уравнения в усредненной форме.

Автор благодарит акад. Л. И. Седова и А. Г. Куликовского за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

Институт геохимии и аналитической химии
им. В. И. Вернадского
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. A. **283**, 238 (1965). [2] G. B. Whitham, J. Fluid Mech., **22**, 273 (1965). [3] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958. [4] J. C. Luke, Proc. Roy. Soc. A, **292**, 403 (1966). [5] Л. И. Седов, УМН, **20**, в. 5 (1965). [6] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, «Наука», 1965. [7] М. Лурье, ПММ, **30**, 747 (1966).