Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 519.9 МАТЕМАТИКА

А. Е. ГЕЛЬМАН

ОДИН ПРИНЦИП НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 16 XI 1970)

В работе ([1]) доказана одна теорема существования для уравнений вида

$$\chi = \varphi(x) \tag{1}$$

в полных метрических пространствах. В отличие от принципа сжатых отображений (или итерационной теоремы Шредера ([1])), условие, налагаемое на фукцию $\varphi(x)$ в этой теореме, должно выполняться не для каждой пары точек, а для каждой точки рассматриваемой области. Подобной же одноточечной теоремы единственности в известных нам работах нет; они везде двухточечные.

В настоящей работе предлагается одноточечный принцип неподвижной точки (принцип T).

Проверка выполнения условий принципа T не сложнее, чем в принципе сжатых отображений, и не требует привлечения каких-либо дополнительных исследований. Вместе с тем сфера приложения принципа T представляется достаточно широкой: доказано, что выполнение условий этого принципа есть необходимое и достаточное условие сходимости итерационных процессов высшего порядка (см. теорему 6). Доказано также, что имеются уравнения типа (1), существование решения которых нельзя доказать с помощью известных двухточечных принципов, но можно это сделать с помощью принципа T.

Заметим также, что теорема 3 настоящей работы может быть получена и с помощью результатов работы ([4]).

Определение*. Будем называть $T(\mathscr{D}, k, M)$ множество всех функций $\varphi(x)$, обладающих свойствами:

а) $\varphi(x)$ — функция со значениями в полном метрическом пространстве X, заданная и непрерывная на некотором его подмножестве $\mathscr{D}$;

б) существуют такие числа $M > 0$ и $k \geqslant 1$, что для любого $x \in \mathscr{D}$, для которого $\varphi(x) \in \mathscr{D}$, выполнено неравенство

$$\rho\{\varphi[\varphi(x)], \varphi(x)\} \leqslant M\{\rho[\varphi(x), x]\}^k.$$

Если ввести в рассмотрение заданный на $\mathscr{D}$ функционал

$$\Delta(x) = \rho[x, \varphi(x)],$$

то последнее условие может быть записано в более обозримом виде

$$\Delta[\varphi(x)] \leqslant M[\Delta(x)]^k.$$

Теорема 1. 1. *Если $\psi(x)$ является в $\mathscr{D}$ оператором сжатия с постоянной θ_0, то $\psi(x) \in T(\mathscr{D}, 1, \theta_0)$.*

2. *Существует вещественная функция $\varphi(x)$ такая, что*

а) $\varphi(x) \in T(s, 1, \theta)$, *где* $s = [-1, +1]$, *а* $0 < \theta < 1$.

б) *уравнение* (1) *имеет в s единственный корень* $\tilde{x} = 0$;

в) $\varphi(x)$ *не удовлетворяет условию Липшица* (*с какой бы то ни было постоянной*) *ни в какой окрестности* x.

---

* Обозначения, введенные здесь, систематически используются в дальнейшем.

Приведем некоторые соображения, позволяющие доказать п. 2 теоремы 1. Введем в рассмотрение последовательность точек $\mathcal{P}_n(x_n, y_n)$, где

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad y_n = \begin{cases} \frac{1}{3n}, & n = 2k-1; \\ \frac{1}{2n}, & n = 2k; \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Соединяя последовательно точки $\mathcal{P}_n$ отрезками прямой, получим ломаную $\mathcal{L}$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, заданную на $[-1, +1]$ следующим образом; на $(0, 1]$ график $\varphi(x)$ совпадает с ломаной $\mathcal{L}$; на $[-1, 0)$ он симметричен $\mathcal{L}$ относительно точки $(0, 0)$, и $\varphi(0) = 0$. Нетрудно усмотреть, что $\varphi(x)$ есть непрерывная функция, не удовлетворяющая условию Липшица ни в какой окрестности точки $x = 0$. С другой стороны, легко установить, что

$$\Delta[\varphi(x)] \leqslant {}^2/_3\Delta(x),$$

т. е.

$$\varphi(x) \in T(s, 1, {}^2/_3).$$

Теорема 2 (пример функции из $T(\mathcal{D}, 2, M)$). *Пусть $f(x)$ — функция со значениями в B-пространстве X, заданная и дважды непрерывно дифференцируемая в области G этого пространства; при этом оператор $f'(x)$ имеет ограниченный обратный $(f')^{-1}(x)$ для любого $x \in G$. Пусть $\varphi(x) = x - (f')^{-1}(x)f(x)$.*

Тогда $\varphi(x) \in T(\mathcal{D}, 2, M)$, где $\mathcal{D}$ — любое замкнутое подмножество G, а $M = {}^1/_2 \sup \|(f')^{-1}(x)\| \sup \|f''(x)\|$.

Пусть $x_0 \in \mathcal{D}$, обозначим $\delta_0 = \Delta(x_0) = \rho(x_0, \varphi(x_0))$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(x) \in T(\mathcal{D}, k, M)$, $x_0 \in \mathcal{D}$, $M\delta_0^{k-1} < 1$ и $\mathcal{D}$ содержит замкнутую сферу S_0: $\rho(x_0, x) \leqslant \delta_0 / (1 - M\delta_0^{k-1})$.*

*Тогда рекуррентная формула $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ определяет бесконечную последовательность $\{x_n\} = \Phi(x_0)$, * при этом*

а) $\Phi(x_0) \subset S_0$;

б) *существует $\lim x_n = \tilde{x}$, $\tilde{x}$ содержится в S_0 и является решением уравнения (1);*

в) *имеет место оценка*

$$\rho(\widetilde{x}, x_0) \leqslant \begin{cases} \delta_0 M^n/(1-M) & \text{при } k = 1, \\ \delta_0 \theta^{k^n - 1}/(1 - \theta^{k^n(k-1)}) & \text{при } k > 1 \\ (\theta = \delta_0 M^{1/(k-1)}). \end{cases} \qquad (2)$$

Следствие 1. *Рассмотрим уравнение (1), где $\varphi(x)$ — функция, построенная в доказательстве теоремы 1 (п. 2). Для такого уравнения при $|x_0| < {}^1/_4$ выполнены все условия теоремы 3, но не выполнены условия принципа сжатых отображений Банаха или итерационной теоремы Шредера* [1]. *Поэтому существование решения этого уравнения следует из теоремы 3, а иные итерационные принципы, упомянутые выше, в этом случае неприменимы.*

Следствие 2 (см. [2], стр. 641). *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и $x_0 \in \mathcal{D}$. Введем обозначения*

$$r_0 = \rho(x_0, X \setminus \mathcal{D}), \quad \delta_0 = \|(f')^{-1}(x_0) f(x_0)\|.$$

Тогда, если выполнено неравенство

$$\delta_0 < r_0 / (1 + Mr_0),$$

уравнение $f(x) = 0$ имеет в $\mathcal{D}$ решение, которое может быть найдено методом Ньютона, если за исходное приближение принять x_0.

---

* Это обозначение применяется и в дальнейшем.

Для приближений x_ν выполнена оценка (2).

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{D}$ открыто, $\varphi(x) \in T(\mathcal{D}, k, M)$ (причем, если $k = 1$, то $M < 1$) и уравнение (1) имеет в $\mathcal{D}$ решение $\tilde{x}$.*

Тогда существует окрестность $\mathcal{P}$ точки $\tilde{x}$ такая, что последовательность $\Phi(x)$ имеет предел $\xi(x)$ для любого $x \in \mathcal{P}$. Функция $\xi(x)$ на $\mathcal{P}$ удовлетворяет уравнению $\xi(x) = \varphi[\xi(x)]$ и непрерывна.

Следствие 1. *Если $\xi(x) = \mathrm{const}$, то $\xi(x) = \xi(\tilde{x}) = \tilde{x}$, т. е. $\Phi(x)$ сходится к $\tilde{x}$ вне зависимости от выбора $x \in \mathcal{P}$.*

Если же $\xi(x)$ на $\mathcal{P}$ отлична от постоянной, то X множество решений уравнения (1) содержит бесконечное множество $\xi(\mathcal{P})$ и потому само бесконечно. Такой случай реализуется, если, например, за функцию $\varphi(x)$ выбрать x (очевидно, что если $\varphi(x) \equiv x$, то $\varphi(x) \in T(\mathcal{D}, k, M)$, где k и M произвольны).

Следствие 2. *Если $\tilde{X}$ имеет предельную точку $x^* \in \mathcal{D}$, то компонента точки x^* множества $\tilde{X}$ отлична от точки x^*.*

Таким образом, множество решений уравнения (1), принадлежащих разным компонентам множества $\tilde{X}$, не может иметь в $\mathcal{D}$ предельной точки. В частности, и множество изолированных решений уравнения (1) не может иметь в $\mathcal{D}$ предельной точки.

Определение. Будем называть G-решением уравнения (1) в $\mathcal{D}$ всякую компоненту множества $\tilde{X} \cap \mathcal{D}$.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{D}$ связано и замкнуто, $\varphi(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ и $\varphi(x) \in T(D, 1, \theta)$, где $\theta < 1$.*

Тогда уравнение (1) имеет в $\mathcal{D}$ единственное G-решение.

Последовательность $\Phi(x)$ сходится, если $x \in \mathcal{D}$. Ее пределом для каждого x является элемент упомянутого G-решения.

Замечание. Справедливость теоремы не нарушается, если условие $\varphi(x) \in T(\mathcal{D}, 1, \theta)$, где $\theta < 1$, заменить более сильным: $\varphi(x) \in T(\mathcal{D}, k, M)$, где $M \sup[\Delta x]^{k-1} < 1$ $(k \geqslant 1)$.

Теорема 6. *Пусть $\tilde{x}$ — изолированное решение уравнения (1). Для того чтобы в некоторой окрестности $\tilde{x}$ выполнялось неравенство*

$$\rho[\tilde{x}, \varphi(x)] \leqslant M[\rho(\tilde{x}, x]^k,$$

где M — постоянная, а $k > 1$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая окрестность $\mathcal{D}$ точки $\tilde{x}$ и такое число M_1, что

$$\varphi(x) \in T(\mathcal{D}, k, M).$$

Из теоремы видно, что с помощью принципа T можно определить порядок k и исследовать характер сходимости для любого итерационного процесса высшего порядка $(k > 1)$.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступило
25 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Schröder, Arch. Math., 7, 471 (1956). [2] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. [3] Л. Коллатц, Функциональный анализ и вычислительная математика, М., 1969. [4] W. C. Rheinboldt, SIAM J. Num. Anal., 5, № 1 (1968).