Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 519.44 МАТЕМАТИКА

П. М. ГУДИВОК, С. Ф. ГОНЧАРОВА, В. П. РУДЬКО

ОБ АЛГЕБРЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ p-АДИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 19 XI 1970)

Пусть F — конечное расширение поля рациональных p-адических чисел Q_p, T — поле инерции поля F, $R(Z_p)$ — кольцо всех целых величин поля $F(Q_p)$, P — простой идеал кольца R, Z — кольцо целых рациональных чисел, Q — поле рациональных чисел, $a(RG)$ — кольцо R-представлений конечной группы G (определение см., например, в [1]) и $A(RG) = Q\otimes_Z a(RG)$. Наиболее интересные результаты при изучении алгебры $A(RG)$ получены в [1-5]; в [4, 5] изучение сведено к изучению ее идеалов, тесно связанных с R-представлениями p-подгрупп группы G.

Лемма 1 (Райнер). *Пусть конечная группа G содержит циклическую подгруппу порядка n. Если $n\in P^2$ при $2\notin P$ и $n\in 2P$ при $2\in P$, то алгебра $A(RG)$ содержит нильпотентные элементы. Если силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p, то алгебра $A(Z_pG)$ полупроста.*

В [6] показано, что если силовская p-подгруппа группы G нециклична, то $A(RG)$ содержит нильпотентные элементы. В [7] описана алгебра $A(Z_pH)$, когда H — циклическая группа порядка p^2.

В настоящей работе, используя упомянутые результаты, мы решаем задачу о полупростоте $A(RG)$ и описываем $A(RH)$ в случае, когда число $n(RH)$ неразложимых R-представлений p-группы H конечно [8-10].

Теорема 1. *Алгебра $A(RG)$ полупроста тогда и только тогда, когда $(|G|, p) = 1$ или силовская p-подгруппа группы G имеет порядок p и при $p\neq 2$ поле F является неразветвленным расширением поля Q_p.*

Доказательство опирается на результаты [4, 6, 9] и лемму 1.

Замечание 1. Теорема, аналогичная теореме 1, справедлива также для алгебры $A(LG)$, где L — локальное числовое кольцо.

Пусть H есть p-группа. Исследуем алгебру $A(RH)$ при $n(RH)<\infty$. Из [8-10] и теоремы 1 нетрудно получить, что при $n(RH)<\infty$ $A(RH)$ обладает нетривиальным радикалом тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

1) $|H| = p^2$ и $F = T$;
2) $|H| = p\neq 2$ и $(F:T) = 2$;
3) $|H| = 3$ и $(F:T) = 3$.

Поскольку в случае 1) неразложимые R-представления циклической p-группы $H=(a)$ имеют такой же вид, как неразложимые Z_p-представления группы H [9], то в этом случае $A(RH)$ изоморфна $A(Z_pH)$. Алгебра $A(Z_pH)$ изучена в [1] при $p=2$ и в [7] при $p\neq 2$. Из [9] вытекает, что в случае 2) алгебра $A(RH)$ изоморфна $A(KH)$, где K — кольцо всех целых величин некоторого разветвленного квадратичного расширения S поля Q_p. Исследуем алгебру $A(KH)$. Пусть $P=(t)$ — простой идеал кольца K и

$\bar K = K/P$. Все неразложимые $\bar K$-представления группы $H = (a)$ имеют вид

$$a \to V_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

где V_i — жорданов ящик порядка i с единицами по главной диагонали. Обозначим через V_i' $\bar K H$-модуль, в котором реализуется представление (1).

Пусть $a(\bar K H)$ — кольцо $\bar K$-представлений группы $H = (a)$, $A(\bar K H) = Q \otimes_z a(\bar K H)$, M — KH-модуль с конечным K-базисом и $\bar M = M / PM$. Очевидно, $\psi(M) = \bar M$ задает гомоморфное отображение $A(KH)$ на $A(\bar K H)$. Так как $A(\bar K H)$ полупроста ([11]), то радикал N алгебры $A(KH)$ принадлежит $\operatorname{Ker} \psi$.

Лемма 2 ([11,12]). *Пусть* $V_i' \otimes_{\bar K} V_j' \simeq \sum\limits_{n=1}^{r} \oplus V'_{d_n}$.

Тогда $r \leqslant j$ *и* $V'_{p-1} \otimes_{\bar K} V_j' \cong \sum\limits_{n=1}^{r} \oplus V'_{p-d_n} \oplus (j-r) V_p'$.

Если $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant s = {}^1/_2(p-1)$, то $V_i' \otimes_{\bar K} V_j' \cong \sum\limits_{h=1}^{i} \oplus V'_{j-i+2h-1}$.

Лемма 3 (Шануэль, см. в ([13])). *Пусть RG — групповое кольцо конечной группы G над кольцом R и $O \to M \to L \to B \to O$, $O \to M' \to L' \to B' \to O$ — точные последовательности RG-модулей. Если L и L' — проективные RG-модули и $B \cong B'$, то $M \oplus L' \cong M' \oplus L$.*

Лемма 4. *Пусть G — конечная группа и M_1, M_2 — такие неизоморфные R-свободные RG-модули, что $P^r\Gamma \subset M_i \subset \Gamma$ ($i = 1, 2$) и Γ-модули $M_1 / P^r M_1$ и $M_2 / P^r M_2$ изоморфны ($\Gamma = RG$).*

Тогда $\{M_1\} - \{M_2\}$ — нильпотентный элемент $a(RG)$ ($\{M_i\}$ — класс всех RG-модулей, изоморфных модулю M_i; $i = 1, 2$).

При $r = 1$ лемма 4 доказана в ([1]). В общем случае доказательство аналогично.

Пусть X_i, Y_j — идеалы кольца KH, порожденные соответственно элементами t, $(a-1)^{i+1}$ и t, $(a-1)^{p-j}$ ($H = (a)$; $a^p = 1$; $i = 0, 1, \ldots, s-1$; $j = 0, 1, \ldots, s$; $s = {}^1/_2(p-1)$). Нетрудно проверить, что $\bar X_i \cong \bar Y_{i+1}$ и $P\Gamma \subset X_i \subset \Gamma$, $P\Gamma \subset Y_{i+1} \subset \Gamma$ ($i = 0, 1, \ldots, s-1$). Так как модули X_i и Y_{i+1} неизоморфны, то, в силу леммы 4, $\{X_i\} - \{Y_{i+1}\}$ являются ненулевыми нильпотентными элементами в $A(KH)$. Отсюда и из леммы 3 вытекает

Лемма 5. *Идеал I алгебры $A(KH)$, порожденный элементами $\{X_i\} - \{Y_{i+1}\}$ ($i = 0, 1, \ldots, s-1$), нильпотентен, причем $I^2 = 0$.*

Разветвленные квадратичные расширения S поля Q_p бывают двух типов: A) $S \subset Q_p(\varepsilon)$, B) $S \not\subset Q_p(\varepsilon)$ ($\varepsilon^p = 1$).

Неразложимые K-представления группы $H = (a)$ описаны в ([8, 9]). Введем обозначения для модулей неразложимых K-представлений группы H, причем будем пользоваться нумерацией представлений в теоремах 1 и 2 в ([8]) *.

Случай A (см. теорему 1 в ([8])):

1) $\to \Delta$; 2) $\to \Delta_i$ ($i = 1, 2$); 3) $\to \Gamma_i$ ($i = 1, 2$); 4) $\to T_r$ ($r = 0, 1, \ldots, s-1$); 5) $\to X_r$ ($r = 0, 1, \ldots, s-1$); 6) $\to Y_j$ ($j = 0, 1, \ldots, s$); 7) $\to Z_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s-1$; $s = {}^1/_2(p-1)$).

Случай B (см. теорему 2 в ([8])):

1) $\to \Delta$; 2) $\to T_0$; 3) $\to T_r$ ($r = 1, \ldots, s$); 4) $\to C_i$ ($i = 0, 1$), где $C_0 = Y_0$, $C_1 = X_0$; 5) $\to X_i'$ ($i = 1, \ldots, s$), где $X_j' = X_j$ ($j = 1, \ldots, s-1$), $X_s' = Y_s$; 6) $\to Y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, s-1$); 7) $\to Z_i$ ($i = 1, \ldots, s$). (Стрелка означает, что, например, представление вида 6) реализуется в модуле Y_i.)

---

* Отметим, что в ([8]) в формулировке теоремы 2 есть описка: представлений вида 7) имеется $s = {}^1/_2(p-1)$ при $p \geqslant 3$ (а не $s-1$ при $p > 3$).

Положим $T_{s+i} = T_{s-i}$, $X_{s+i} = Y_{s-i}$, $Z_{s+i} = Z_{s-i}$ $(0 \leqslant i \leqslant s)$ и в случае А $T_s = \Delta_1 \oplus \Delta_2$, $Z_s = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. Отметим, что $Y_0 \cong KH$.

Можно показать, что являются точными последовательности:

$$0 \to T_0 \to KH \to \Delta \to 0,$$

$$0 \to \Gamma_i \to KH \to \Delta_i \to 0, \quad i = 1, 2,$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \to Z_j \to KH \oplus KH \to T_j \to 0, \\ 0 \to X_j \to KH \oplus KH \to Y_{j+1} \to 0, \end{array}\right. \quad 0 \leqslant j \leqslant s-1. \tag{2}$$

Лемма 6. *Если* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, *то*

$$\Delta_1 \otimes \Delta_2 \cong T_1 \oplus T_3 \oplus \ldots \oplus T_{s-1};$$

$$\Delta_i \otimes \Delta_i \cong \Delta \oplus \Gamma_r \oplus Z_2 \oplus Z_4 \oplus \ldots \oplus Z_{s-2} \quad (i = 1, 2;\ r \neq i);$$

если $p \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4)$ $(p > 3)$, *то*

$$\Delta_i \otimes \Delta_i \cong \Delta_r \oplus T_1 \oplus T_3 \oplus \ldots \oplus T_{s-2} \quad (i = 1, 2;\ r \neq i);$$

$$\Delta_1 \otimes \Delta_2 \cong \Delta \oplus Z_2 \oplus Z_4 \oplus \ldots \oplus Z_{s-1}.$$

Лемма 7. *При* $p \neq 3$ *справедливы следующие формулы:*

$$\Delta_d \otimes T_{2i} \cong \Gamma_r \oplus (s - 2i - 1)\, Y_0 \oplus \sum_{j=1}^{i} \oplus (Z_{s-2j} \oplus T_{s-2j+1}) \quad (r \neq d);$$

$$\Delta_d \otimes T_{2i+1} \cong \Delta_r \oplus (s - 2i - 2)\, Y_0 \oplus \sum_{j=0}^{i} \oplus Z_{s-2j-1} \oplus \sum_{j=1}^{i} \oplus T_{s-2j} \quad (r \neq d);$$

$$\Delta_d \otimes T_1 \cong \Delta_r \oplus (s-2)\, Y_0 \oplus Z_{s-1};$$

$$T_i \otimes T_j \cong (p - 2i - 3)\, Y_0 \oplus \sum_{h=1}^{i} \oplus T_{j-i+2h-1} \oplus \sum_{h=1}^{i+1} \oplus Z_{j-i+2h-2} \quad (0 < i < j);$$

$$T_i \otimes T_i \cong \Delta \oplus (p - 2i - 2)\, Y_0 \oplus \sum_{h=1}^{i} \oplus (T_{2h-1} \oplus Z_{2h}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s-1);$$

$$T_s \otimes T_s \cong 2\Delta \oplus 2 \sum_{r=0}^{d'} \oplus T_{2r+1} \oplus \sum_{r=1}^{d'-1} \oplus Z_{2r} \oplus Z_s \quad \left(p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4);\ d' = \frac{s-2}{2}\right);$$

$$T_s \otimes T_s \cong 2\Delta \oplus 2 \sum_{r=1}^{t'} \oplus (T_{2r-1} \oplus Z_{2r}) \oplus T_s \quad \left(p \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 4);\ t' = \frac{s-1}{2}\right);$$

$$X_i \otimes X_j \cong (p - 2i - 2)\, Y_0 \oplus \sum_{h=1}^{i+1} \oplus (X_{j-i+2h-2} \oplus Y_{j-i+2h-1}) \quad (0 \leqslant i \leqslant j).$$

Замечание 2. Пользуясь леммами 2, 3, 6, 7 и формулами (2), можно написать таблицу тензорного умножения неразложимых KH-модулей.

Теорема 2. *Пусть* $H = (a)$ — *циклическая группа порядка* $p \neq 2$, K — *кольцо целых величин разветвленного квадратичного расширения поля* Q_p. *Радикал* N *алгебры* $A(KH)$ *порождается элементами* $\{X_i\} - \{Y_{i+1}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$, *которые образуют также* Q-*базис* N. *Кроме того,* $N^2 = 0$.

Доказательство теоремы опирается на леммы 2—6.

Теорема 3. *Пусть* K_i — *кольцо целых величин поля*

$$S_i = \begin{cases} Q_p(\sqrt{p}), & \text{если } p \equiv (-1)^{i+1} (\mathrm{mod}\, 4), \\ Q_p(\sqrt{p\omega}), & \text{если } p \equiv (-1)^{i} (\mathrm{mod}\, 4) \end{cases}$$

$(i = 1, 2;$ ω — *первообразный корень степени* $p - 1$ *из* 1).

Если N_i — радикал алгебры $A(K_iH)$ (H — группа порядка $p \neq 2$), то

$$A(K_1H)/N_1 \cong Q \oplus Q(\sqrt{(-1)^s p}) \oplus Q(\sqrt{(-1)^s p}) \oplus Q(\alpha) \oplus Q(\alpha) \oplus Q(\alpha),$$
$$A(K_2H)/N_2 \cong Q \oplus Q \oplus Q(\alpha) \oplus Q(\alpha) \oplus Q(\alpha) \oplus Q$$

($s = {}^1/_2(p-1)$, $\alpha = \varepsilon + \varepsilon^{-1}$; ε — *первообразный корень степени* p *из* 1).

При доказательстве теоремы 3 используется строение алгебры модулярных представлений $A(\bar{K}H)$ (см. [14]).

Наконец, рассмотрим случай 3, т. е. когда $H_1 = (b)$ — группа порядка 3 и F — разветвленное кубическое расширение поля T (T — конечное неразветвленное расширение поля рациональных 3-адических чисел). Пусть L' — кольцо всех целых величин поля F и $P_1 = (u)$ — простой идеал кольца L' ($3 = \theta u^3$; θ — единица кольца L'). Можно показать, что следующие L'-представления группы H_1 являются неразложимыми:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\theta u^2 \\ u & -2 \end{pmatrix}; \quad B_i = \begin{pmatrix} A_1 & u^i C_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_j = \begin{pmatrix} A_2 & C_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(i = 1, 2;\ j = 1, 2);$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & C_2 & C_1 \\ 0 & A_2 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_3 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & uC_1 & 0 \\ 0 & A_2 & C_2 & uC_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Предложение 1. *Радикал N алгебры $A(L'H_1)$ порождается элементами $\{B_1 - D_1,\ B_2 - D_2,\ B_3 - D_3\}$, причем $N^2 = 0$. Фактор-алгебра $A(L'H_1)/N$ изоморфна прямой сумме 12 экземпляров поля рациональных чисел Q.*

Пусть F' — конечное расширение поля рациональных чисел Q, O — кольцо всех целых алгебраических чисел поля F', G — конечная группа и $A(OG) = Q \otimes_Z a(OG)$. Используя результаты [15, 16] о родах, а также теорему 1, нетрудно доказать

Предложение 2. *Алгебра $A(OG)$ полупроста тогда и только тогда, когда порядок группы G не делится на квадрат простого числа и каждое простое число p ($p \neq 2$), делящее порядок группы G, разлагается в произведение различных простых идеалов кольца O.*

Ужгородский государственный университет

Поступило 13 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Reiner, Michigan Math., J., 12, 11 (1965). [2] I. Reiner, Proc. Am. Math. Soc., 17, 270 (1966). [3] I. Reiner, Trans. Am. Math. Soc., 124, 111 (1966). [4] J. A. Green, J. Algebra, 1, № 1, 73 (1964). [5] S. B. Conlon, J. Algebra, 8, № 4, 478 (1968). [6] J. Zemanek, Ph. D. Thesis, Univ. of Illinois, 1969. [7] В. П. Рудько, Доп. АН УРСР, № 1, 35 (1967). [8] П. М. Гудивок, ДАН, 159, № 6, 1210 (1964). [9] П. М. Гудивок, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 4, 799 (1967) [10] H. Jacobinski, Acta math., 118, 1 (1967). [11] J. A. Green, Illinois J. Math., 6, № 4, 607 (1962). [12] В. С. Дроботенко, Доп. АН УРСР, № 7, 827 (1965). [13] R. G. Swan, Ann. Math., 2, № 72, 267 (1960). [14] В. П. Рудько, УМЖ, 20, № 6, 841 (1968). [15] Д. К. Фаддеев, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 2, 475 (1964). [16] А. В. Ройтер, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, № 6, 1315 (1966).