Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. ДАВЫДОВ

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ ЗАКОНА АРКСИНУСА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 16 XI 1970)

Закон арксинуса, доказанный в ([1]) для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными вторыми моментами, обобщался в различных направлениях. Так, в ([2]) был получен результат (теорема 7.1), из которого следовало, что предельным распределением для времени пребывания на положительной полуоси для блужданий, притягивающихся к устойчивым законам с показателем меньшим двух, является бета-распределение с параметрами, зависящими от вида этих устойчивых законов.

Второе направление связано с недавними работами ([3], [4]), где было показано, что предельное распределение для времени пребывания в множестве существует не только в том случае, когда это множество полупрямая, но и тогда, когда оно в некотором смысле достаточно равномерно распределено на полупрямых $x > 0$ и $x < 0$.

Настоящая работа продолжает эти исследования.

1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, одинаково распределенных и принадлежащих области притяжения устойчивого закона с показателем α и характеристической функцией

$$f(t) = \exp\{-|t|^\alpha e^{\pm i\varphi}\}, \tag{1}$$

где $0 < \alpha \leqslant 2$, $\alpha \neq 1$; $|\varphi| \leqslant \pi\alpha/2$ при $0 < \alpha < 1$ и $|\varphi| \leqslant \frac{2-\alpha}{2}\pi$ при $1 < \alpha \leqslant 2$. Знак «+» выбирается при $t > 0$, а «−» при $t < 0$ (по поводу такого представления см. ([5])). Положим $\gamma = P\{\xi > 0\}$, где ξ — случайная величина с характеристической функцией (1) *. Пусть, далее, $h(x)$ — ограниченная функция, определенная для всех вещественных x, и такая, что при $T \to \infty$

$$\frac{1}{T}\int_0^T h(x)\,dx \to p, \quad \frac{1}{T}\int_{-T}^0 h(x)\,dx \to q.$$

Положим также $S_n = \sum_1^n \xi_k$, $\tau_n = \frac{1}{n}\sum_1^n h(S_k)$.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого n распределение S_n содержит ненулевую абсолютно непрерывную относительно меры Лебега компоненту.*

Тогда

$$P\{\tau_n < x\} \to P\{p\tau + q(1-\tau) < x\}, \tag{2}$$

где τ — случайная величина с функцией распределения **

$$F_\gamma(x) = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi}\int_0^x s^{\gamma-1}(1-s)^{-\gamma}\,ds, \quad x \in [0, 1]. \tag{3}$$

---

* В ([6]) показано, что $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{\pi\alpha}$.

** Распределение $F_\gamma(x)$ есть бета-распределение с параметрами $\nu_1 = \gamma_1$, $\nu_2 = 1 - \gamma$.

Теорема 2. *Предположим, что распределение величин ξ_k решетчато и сосредоточено на множестве $H=\{ka \mid a>0,\ k=0,\pm 1,\ldots\}$. Пусть $h(x)$ определена на H и такова, что*

$$\frac{1}{n}\sum_{0}^{n} h(ka)\to p; \qquad \frac{1}{n}\sum_{-n}^{0} h(ka)\to q,$$

а τ_n определена, как и выше.

Тогда имеет место соотношение (2).

Взяв в качестве $h(x)$ характеристическую функцию множества, получим

Следствие. *Если множество A таково, что*

$$\frac{\operatorname{mes}(A\cap[0,T])}{T}\to p, \qquad \frac{\operatorname{mes}(A\cap[-T,0])}{T}\to q,$$

то распределение доли времени, проведенной блужданием в множестве A, сходится к распределению случайной величины $p\tau+q(1-\tau)$, где распределение τ задается формулой (3).

Аналогичное следствие можно сформулировать и для случая решетчатых распределений.

2. Наметим основные этапы доказательства.

Лемма 1. *Предположим, что функции $h_k(x)$, $k=1,\ldots,n$; $x\geqslant 0$, таковы, что $\frac{1}{T}\int\limits_0^T h_k(x)\,dx\to p_k$, $|p_k|<\infty$. Возьмем какое-нибудь множество $Q\subset \mathbf{R}^n$, лежащее в области $\{x_1\geqslant 0,\ldots,x_n\geqslant 0\}$, для которого лебегова мера границы равна нулю.*

Тогда при $T\to\infty$

$$\int\limits_Q \prod_1^n h_k(x_kT)\,dx_1\ldots dx_n\to \operatorname{mes}(Q)\prod_1^n p_k. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть η_t — процесс с независимыми и однородными приращениями и такой, что плотность распределения величины η_t $p_t(x)=\frac{1}{t^{1/\alpha}}\,p\left(\frac{x}{t^{1/\alpha}}\right)$, где $p(x)$ — плотность распределения с характеристической функцией* (1).

Тогда для любых $t_1,\ldots,t_n>0$

$$E\{h_1(\eta_{t_1T})\cdot h_2(\eta_{t_2T})\ldots h_n(\eta_{t_nT})\}\to P\{\eta_{t_1}>0,\ldots,\eta_{t_n}>0\}\prod_1^n p_k. \tag{5}$$

Лемма 3. *Если в условиях леммы 2 функции $h_k(x)$ таковы, что*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T h_k(x)\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^0 h_k(x)\,dx=p_k,$$

то

$$E\{h_1(\eta_{t_1T})\ldots h_n(\eta_{t_nT})\}\to\prod_1^n p_k.$$

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{P}_n$ и $\mathfrak{P}_n'$ — распределения векторов $(S_{t_1n},\ldots,S_{t_kn})$ и $(\eta_{t_1B_n^\alpha},\ldots,\eta_{t_kB_n^\alpha})$, где $S_t=S_n$, при $t\in[n,n+1)$, а B_n — те нормирующие постоянные, для которых S_n/B_n сходится по распределению к η_1.*

Тогда $\operatorname{var}(\mathfrak{P}_n-\mathfrak{P}_n')\to 0$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Сначала предположим, что $h(x) = 0$ при $x < 0$. Из лемм 1, 2, 4 следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E\tau_n^k = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 E\{h(S_{t_1 n}) \ldots h(S_{t_k n})\}\, dt_1 \ldots dt_k =$$

$$= p^k \int_0^1 \cdots \int_0^1 P\{\eta_{t_1} > 0, \ldots, \eta_{t_k} > 0\}\, dt_1, \ldots, dt_k. \tag{6}$$

Беря в (6) в качестве функции h характеристическую функцию полупрямой $x > 0$ и пользуясь упомянутой теоремой Спицера ([2]), придем к равенству

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 P\{\eta_{t_1} > 0, \ldots, \eta_{t_k} > 0\}\, dt_1 \ldots dt_k = m_\gamma^k,$$

где $m_\gamma^k = \int x^k dF_\gamma(x)$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} E\tau_n{}^k = m_\gamma{}^k p^k$ и, значит, $\tau_n \to p\tau$.

Теперь предположим, что $q = p$. Тогда, применяя леммы 3 и 4, найдем, что $\lim\limits_{n\to\infty} E\tau_n{}^k = p^k$, откуда следует сходимость τ_n к вырожденному распределению, сосредоточенному в точке p.

В общем случае полагаем $h_1(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $h_1(x) = p - q$ при $x > 0$; $h_2(x) = h(x) - h_1(x)$. Очевидно,

$$\frac{1}{T}\int_0^T h_2(x)\, dx \to q; \quad \frac{1}{T}\int_{-T}^0 h_2(x)\, dx \to q.$$

Поскольку $\tau_n = \frac{1}{n}\sum_1^n h_1(S_k) + \frac{1}{n}\sum_1^n h_2(S_k)$ и по доказанному $\frac{1}{n}\sum_1^n h_1(S_k) \to$

$\to (p - q)\tau$, а $\frac{1}{n}\sum_1^n h_2(S_k) \to q$ по распределению, то $\tau_n \to p\tau + q(1 - \tau)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 совпадает с изложенным, если вместо леммы 4 использовать следующее предложение.

Лемма 5. *В условиях теоремы* 2

$$|E\{h(S_{t_1 n}) \ldots h(s_{t_k n})\} - E\{h(\eta_{t_1 B_n^\alpha}) \ldots h(\eta_{t_k B_n^\alpha})\}| = o(1).$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
30 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Erdös, M. Kac, Bull. Am. Math. Soc., 53, 1011 (1947). [2] F. Spitzer, Trans. Am. Math. Soc., 82, 323 (1956). [3] А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, Укр. матем. журн., 17, 2, 97 (1965). [4] А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, Теория вероятностей и ее применения, 10, № 4, 660 (1965); 11, № 1, 56 (1966). [5] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., 1964. [6] Ю. А. Давыдов, И. А. Ибрагимов, Теория вероятностей и ее применения, 16, № 1 (1971). [7] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, «Наука», 1965.