Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 517.948.3 МАТЕМАТИКА

Е. Г. ДЬЯКОНОВ

О ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 IV 1970)

В п. 1 настоящей работы предлагается функциональная схема приближенных методов, объединяющая конструкции ([1, 2]) и ([3, 4]); п. 2 посвящен исследованию корректности нелинейных приближенных задач и взаимосвязан с результатами ([5–14]); в п. 3 приведены примеры исследованных разностных краевых задач, в частности, для разностных аналогов сильно эллиптических систем второго порядка в параллелепипеде получены априорные оценки в W_2^2.

1. Введем обозначения: H — банахово пространство, вложенное в нормированное пространство (н.п.) H_0; ω — множество элементов h некоторого н.п. $\{h\}$ с нормой $|h|$ такое, что $\forall h \in \omega$ $|h| > 0$ и $\exists h_n \in \omega$, $n = 1, 2, \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} |h_n| = 0$.

Пусть каждому $h \in \omega$ соответствуют

1) $H_h \equiv \dot{H}$ — конечномерное н.п., размерность которого зависит от h и стремится к ∞ при $|h| \to 0$;

2) $Q_h \equiv \dot{Q}$ — н.п.

3) линейные операторы $p_h \equiv \dot{p}$, $q_h \equiv \dot{q}$ и $r_h \equiv \dot{r}$, отображающие соответственно $\dot{H}$ в $\dot{Q}$, H в $\dot{Q}$ и H в $\dot{H}$. Кроме того, предполагаем, что $\forall u \in H$ $\lim\limits_{|h|\to 0} \|\dot{q}u\|_{\dot{Q}} = \|u\|_{H_0}$.

Рассмотрим теперь операторные уравнения

$$L(u) = f, \qquad u \in T; \tag{1}$$

$$\dot{L}(\dot{u}) = \dot{f}, \quad \dot{u} \in \dot{T}, \quad h \in \omega, \tag{2}$$

где операторы L и $\dot{L}$ взаимно однозначно отображают множества T и $\dot{T}$ из пространства H и $\dot{H}$ соответственно в множества T_F', $\dot{T}_F'$ из нормированных пространств F и $\dot{F}$ ($\dot{F}$ состоит из тех же элементов, что и $\dot{H}$).

Тогда погрешность приближенного метода, заменяющего (1) на (2), может измеряться как $\|\dot{z}\|_{\dot{Q}}$, где $\dot{z} \equiv \dot{q}u - \dot{p}\dot{u}$.

Уравнения (2) называем **корректными** на $\dot{T}_F$, если операторы $\dot{L}^{-1}$ (см. (2)) определены и равномерно по $h \in \omega$ непрерывны на множествах $\dot{T}_F$; **аппроксимирующими уравнение** (1), если $\lim\limits_{|h|\to 0} \|\dot{\zeta}\|_{\dot{F}} = 0$, где $\dot{\zeta} \equiv \dot{L}(\dot{r}u) - \dot{f}$.

Теорема 1. *Если уравнения* (2) *корректны на* $\dot{T}_F$ *и аппроксимируют* (1), $\dot{L}(\dot{r}u) \in \dot{T}_F$, *операторы* $\dot{p}$ *равномерно по* $h \in \omega$ *ограничены и* $\lim\limits_{|h|\to 0} \|(\dot{q} - \dot{p}\dot{r})u\|_{\dot{Q}} = 0$, *то* $\lim\limits_{|h|\to 0} \|\dot{q}u - \dot{p}\dot{u}\|_{\dot{Q}} = 0$.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и*

$$\sup_{h\in\omega} \left\{ \sup_{f_1 \in \dot{T}_F,\, f_2 \in \dot{T}_F} \frac{\|\dot{L}^{-1}(f_1) - \dot{L}^{-1}(f_2)\|_{\dot{H}}}{\|f_1 - f_2\|_{\dot{F}}} \right\} \leqslant K,$$

то $\|\dot{q}u - \dot{p}\dot{u}\|_{\dot{Q}} \leqslant K\|\dot{p}\| \, \|\dot{\zeta}\|_{\dot{F}} + \|(\dot{q} - \dot{p}\dot{r})u\|_{\dot{Q}}$.

2. Рассмотрим некоторые вопросы получения априорных оценок решений (2) и исследования корректности (2) в случае гильбертовых пространств (г.п.), используя обозначения: $\dot{G}$ — конечномерное г.п. со скалярным произведением $(\dot{u}, \dot{v})_{\dot{G}} = (\dot{u}, \dot{v})$, $\|\dot{u}\|_{\dot{G}} = \|u\|$, E — единичный оператор, $\dot{B}$ — линейный самосопряженный и положительный оператор, отображающий $\dot{G}$ в $\dot{G}$, $\lambda(\dot{B})$ — любое собственное число $\dot{B}$, $\lambda(\dot{B}) \geqslant \dot{\gamma} > 0$, $\dot{H}$ и $\dot{F}$ — г.п., отличающиеся от $\dot{G}$ лишь определением скалярного произведения: $(\dot{u}, \dot{v})_{\dot{H}} = (\dot{B}\dot{u}, \dot{v})$,

$$(\dot{u}, \dot{v})_{\dot{F}} = (\dot{B}^{-1}\dot{u}, \dot{v}), \|\dot{u}\|_{\dot{H}} = \|\dot{u}\|_{\dot{B}}, \|\dot{u}\|_{\dot{F}} = \|\dot{u}\|_{\dot{B}^{-1}},$$

$$S_{\dot{B}}(r) = \{\dot{u} \in \dot{H} : \|\dot{u}\|_{\dot{B}} \leqslant r\}, \quad S_{\dot{B}^{-1}}(r) = \{\dot{u} \in \dot{F} : \|\dot{u}\|_{\dot{B}^{-1}} \leqslant r\}.$$

Будем предполагать ниже, что $\dot{L}(0) = 0$.

Теорема 3. *Пусть $\dot{L}$ отображает $\dot{H}$ в $\dot{F}$, непрерывен на $S_{\dot{B}}(r)$ и при $\dot{u} \in S_{\dot{B}}(r)$ $(\dot{L}(\dot{u}), \dot{u}) \geqslant \sigma(\|\dot{u}\|_{\dot{B}})\|\dot{u}\|^p_{\dot{B}}$, $\inf\limits_{0 \leqslant t \leqslant r} \sigma(t) \geqslant \sigma_r > 0$, $p > 1$.*

Если $\|f\|_{\dot{B}^{-1}} \leqslant (r')^{p-1}\sigma_{r'}$, $r' \leqslant r$, то (2) имеет решение, принадлежащее сфере $S_{\dot{B}}(r^*)$, $r^* = ((\sigma_{r'})^{-1}\|f\|_{\dot{B}^{-1}})^{1/(p-1)}$. Кроме того, если $\inf\limits_{r>0} \sigma_r = \sigma > 0$, то любое решение его $\dot{u} \in S_{\dot{B}}(r^*)$, $r^* = ((\sigma)^{-1}\|f\|_{\dot{B}^{-1}})^{1/(p-1)}$.

Теорема 4. *Пусть*

$$\dot{L}(\dot{u}) = \dot{R}\dot{u} + \dot{P}(\dot{u}), \tag{3}$$

где $\dot{R}$ — линейный и самосопряженный оператор, а $\dot{P}$ непрерывен на $S_{\dot{B}}(r)$,

$$|\lambda(\dot{R})| \geqslant d > 0, \quad \dot{\Lambda} = \dot{R} + kE \geqslant \theta\dot{B}, \quad \theta > 0, \quad k \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\|\dot{P}(\dot{u})\|_{\dot{\Lambda}^{-1}} \leqslant \mu(\|\dot{u}\|_{\dot{B}})\|\dot{u}\|_{\dot{B}}, \quad \dot{u} \in S_{\dot{B}}(r),$$

где $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant r} \mu(t) \leqslant \mu_r$ *и* $\mu_r < \rho = \theta^{1/2} d(d+k)^{-1}$.

Если $\|f\|_{\dot{\Lambda}^{-1}} \leqslant r'(\rho - \mu_{r'})$, $r' \leqslant r$, то (2), (3) имеет решение $\dot{u}$ такое, что

$$\dot{u} \in S_{\dot{B}}(r^*), \quad r^* = (\rho - \mu_{r'})^{-1}\|f\|_{\dot{\Lambda}^{-1}}.$$

Теорема 5. *Пусть $\dot{L}$ непрерывен и удовлетворяет на $S_{\dot{B}}(r)$ либо условию*

$$(\dot{L}(\dot{u}) - \dot{L}(\dot{v}), \dot{u} - \dot{v}) \geqslant \tilde{\sigma}(\max(\|\dot{u}\|_{\dot{B}}, \|\dot{v}\|_{\dot{B}}))\|\dot{u} - \dot{v}\|^2_{\dot{B}}, \quad \inf_{0 \leqslant t \leqslant r} \sigma(t) \geqslant \tilde{\sigma}_r > 0,$$

либо условиям (3), (4) *и*

$$\dot{P}\|(\dot{u}) - \dot{P}(\dot{v})\|_{\dot{\Lambda}^{-1}} \leqslant \tilde{\mu}(\max(\|\dot{u}\|_{\dot{B}}, \|\dot{v}\|_{\dot{B}}))\|\dot{u} - \dot{v}\|_{\dot{B}}, \quad \sup_{0 \leqslant t \leqslant r} \tilde{\mu}(t) \leqslant \tilde{\mu}_r < \rho.$$

Тогда для любых $\dot{u} \in S_{\dot{B}}(r)$, $\dot{v} \in S_{\dot{B}}(r)$ имеют место неравенства

$$\|\dot{u} - \dot{v}\|_{\dot{B}} \leqslant (\tilde{\sigma}_r)^{-1}\|\dot{L}(\dot{u}) - \dot{L}(\dot{v})\|_{\dot{B}^{-1}}$$

$$\text{или } \|\dot{u} - \dot{v}\|_{\dot{B}} \leqslant (\rho - \tilde{\mu}_r)^{-1}\|\dot{L}(\dot{u}) - \dot{L}(\dot{v})\|_{\dot{B}^{-1}}\theta^{-1/2},$$

и, если $\tilde{\sigma}_r$, $\tilde{\mu}_r$, ρ, θ не зависят от $h \in \omega$, то (2) корректны на $\dot{T}_F = S_{\dot{B}^{-1}}(\tilde{\sigma}_r r)$ и $\dot{T}_F = S_{\dot{B}^{-1}}(\theta^{1/2}(\rho - \tilde{\mu}_r)r)$ соответственно.

Теорема 6. *Пусть $\dot{L}(\dot{u}) = \dot{L}_0\dot{u} + \dot{P}(\dot{u})$, где $\dot{L}_0$ — линейный оператор, $\dot{P}$ непрерывен на $S_{\dot{B}^2}(r) = \{\dot{u}: \|\dot{B}\dot{u}\| \leqslant r\}$, $(\dot{L}_0\dot{u}, \dot{B}\dot{u}) \geqslant \delta\|\dot{B}\dot{u}\|^2$, $\delta > 0$ и для всех $\dot{u} \in S_{\dot{B}^2}(r)$*

$$\|\dot{P}(\dot{u})\| \leqslant \sigma(\|\dot{B}\dot{u}\|)\|\dot{B}\dot{u}\|, \quad \sup_{0 \leqslant t \leqslant r} \sigma(t) \leqslant \sigma_r < \delta, \text{ и } \|\dot{f}\| \leqslant r'(\delta - \delta_{r'}), \tag{5}$$

где $r' \leqslant r$.

Тогда существует решение такое, что $\dot u \in S_{\dot B}{}^2((\delta-\sigma_{r'})^{-1}\|f\|)$.

Теорема 7. *Если в теореме* 6 *вместо условия* (5) *справедливо*

$$\|\dot P(\dot u) - \dot P(\dot v)\| \leqslant \sigma(\|\dot B(\dot u - \dot v)\| \, \|\dot B(\dot u - \dot v)\|,$$
$$\dot u \in S_{\dot B}{}^2(r), \quad \dot v \in S_{B^2}(r), \tag{6}$$

то $\|\dot B(\dot u - \dot v)\| \leqslant (\delta - \sigma_r)^{-1}\|\dot L(\dot u) - \dot L(\dot v)\|$; *если* δ *и* σ_r *не зависят от* $h \in \omega$ *и нормы в* $\dot H$ *и* $\dot F$ *определены как* $\|\dot u\|_{\dot H} \equiv \|\dot B \dot u\|_{\dot G}$ *и* $\|f\|_{\dot F} \equiv \|f\|_{\dot G}$, *то задача* (2) *корректна на* $\dot T_F \equiv \{f\colon \|f\| \leqslant r(\delta - \sigma_r)\}$.

Теорема 8. *Пусть* $\dot L(\dot u) = (\dot B - cE)u + \dot P(u)$, *где* $c \geqslant 0$, $|\lambda(\dot B - cE)| \geqslant d > 0$, P *непрерывен на* $S_{\dot B}(r)$ *справедливо* (5) *с* $\delta \equiv \nu^{-1} g(\max(\gamma, c+d))$, $g(t) \equiv (1 - ct^{-1})^2$,

$$\nu = \max\left(1, \left|\frac{c}{\gamma} - 1\right|\right) \text{ и } \|\dot f\| \leqslant r'(\delta\nu - \sigma_{r'}),\ r' \leqslant r.$$

Тогда существует решение (2) $\dot u \in S_{\dot B^2}((\delta - \sigma_{r'})^{-1}\|f\|)$.

Из теоремы 8 может быть выведена и теорема о корректности, аналогичная теореме 7, если выполнено (6).

3. Приведем некоторые примеры. Если (2) соответствует разностным аналогам сильно эллиптических систем [9, 10], то для них удобно выбрать операторы B в теоремах 3—5, равными $\dot B$ из [9, 10]. Поэтому, например, для разностного аналога системы Кармана из [9] устанавливается корректность и сходимость с погрешностью $\|u - \dot u\|_{\dot B} = O(|h|)$, а при уточнении краевых условий (в случае прямоугольника) и $\|u - \dot u\|_{\dot B} = O(|h|^2)$.

Для иллюстрации теорем 6—8 положим $x \equiv (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\Omega \equiv \{x\colon 0 \leqslant x_s \leqslant l_s, 1 \leqslant s \leqslant n\}, \quad h_s \equiv l_s(N_s + 1)^{-1},$$

$$\Omega_h \equiv \{x_i \equiv (i_1 h_1, \ldots, i_n h_n)\colon 1 \leqslant i_s \leqslant N_s,\ 1 \leqslant s < n\},$$

$\dot G$ — г.п. N-мерных вектор-функций u, определенных в узлах x_i и равных нулю при $x_i \notin \dot\Omega$, $u_i \equiv (u_{1,i}, \ldots, u_{N,i})$,

$$(u, v)_{\dot G} \equiv (u, v) \equiv h_1 h_2 \ldots h_n \sum_{r=1}^{N} \sum_{x_i \in \dot\Omega} u_{r,i} v_{r,i},$$

и используем обозначения $\bar\partial_s$, ∂_s, T_{-s}, T_s из [9]. Пусть

$$\dot L_0 u_i \equiv -\sum_{s,l=1}^{n} \frac{1}{2}\{(T_{-s}a^{sl})\bar\partial_s \partial_l u + (T_s a^{sl})\partial_s \bar\partial_l u\}_i, \quad \dot B u_i \equiv -\sum_{s=1}^{n} \bar\partial_s \partial_s u_i,$$

$$\dot P(u) \equiv (g_1(x, \bar\eta), \ldots, g_N(x, \bar\eta))', \quad \sum_{s,\,l=1}^{N} (a^{sl}\xi^l, \xi^s)_0 \geqslant \sigma \sum_{s=1}^{N} \|\xi^s\|_0^2,\ \sigma > 0, \tag{7}$$

где $a^{s,l}$ — квадратные матрицы порядка N, $a^{sl} = (a^{sl})'$, ξ^s — N-мерные векторы, $(a^{s,l}\xi^l, \xi^s)$ и $\|\xi^s\|_0$ в (7) понимаются в смысле N-мерного эвклидова пространства, $\bar\eta$ — вектор, образованный из всевозможных разностей от u_l $(1 \leqslant l \leqslant N)$ до второго порядка включительно.

Теорема 9. *Пусть матрицы* $a_{sl}(x)$ *таковы, что элементы матрицы* $\partial a_{sl} / \partial x_s$ *непрерывны в* $\bar\Omega$, *а при* $s \neq l$ *непрерывны элементы всех матриц* $\partial a_{sl} / \partial x_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Тогда можно указать $h_0 > 0$ и $\sigma_0 > 0$, $\sigma_1 \geqslant 0$, *не зависящие от* h *с* $h_s \leqslant h_0$, $1 \leqslant s \leqslant n$, *что*

$$(\dot L_0 u, \dot B u) \geqslant \sigma_0 \|\dot B u\|^2 - \sigma_1 \|\dot B u\| \, \|u\|_{\dot B}\,^*, \tag{8}$$

если a_{sl} *при* $s \neq l$ *не зависят от* x_s, *то* $\sigma_1 = 0$, $\sigma_0 = \sigma$; из (7) *при* $\sigma_0 - \max(0, \sigma_1)\gamma^{-1/2} \geqslant \delta > 0$ *следует* $(\dot L_0 u, \dot B u) \geqslant \delta \|\dot B u\|^2$.

---

* При замене в условии (7) знака $\geqslant$ на $\leqslant$, можно доказать неравенство, получаемое из (8) заменой $\geqslant$ на $\leqslant$ и $-\sigma_1$ на σ_1.

Условия на функции $g_s(x, \bar{\eta})$ и их производные по компонентам $\bar{\eta}$, обеспечивающие выполнение (5), (6), могут быть получены подобно соответствующим условиям из [9, 10], на основе неравенства Гёльдера и разностных теорем вложения [2]. Например, при $n = 2$, $N = 1$ в качестве L могут быть взяты $Lu = -\Delta u + u^{2k+1}$ $(k = 0, 1, 2)$, $Lu = -\Delta u + e^u - 1$.

Теорема 10. *Пусть* $\dot{L} = \dot{L}_0 + \sum_{s=1}^{n} b_s \tilde{\partial}_s + c$, *где матрицы* $D_s a_{sl}, b_s, c$ *кусочно-непрерывны и ноль не является точкой спектра оператора* $L \equiv -\sum_{s,l=1}^{n} a_{sl} D_s D_l + \sum_{s=1}^{n} b_s D_s + c$ *как отображения* $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$ *(см* [5]*).*

Тогда существуют $h_0 > 0$ *и* K_1, *не зависящие от* h, *что*

$$\|\dot{B}\dot{u}\| \leqslant K_1 \|\dot{L}\dot{u}\|, \quad \dot{u} \in \dot{G}, \quad h_s \leqslant h_0, \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Результаты, подобные теоремам 3—5 и [9], [10], получены и для более сложных краевых задач, в которых, например, при $i_1 = 0$, $1 \leqslant i_k \leqslant N_k$, $k \geqslant 2$ для $\dot{L}_0$ и $\dot{B}$ заданы краевые условия

$$\sum_{l=1}^{n} a_{1,l} \partial_l u_i = k(u)_i, \quad \partial_1 u_i = \sigma u_i,$$

где вектор-функция $k(u)$ непрерывно дифференцируема по u, $k(0) = 0$ и матрица Якоби $\partial k / \partial u$ такова, что $(\partial k / \partial u, u)$, как функция $x_2, \ldots, x_n$, вкладывается в L_1 при $u \in W_2^1(\Omega)$,

$(\partial k / \partial u, u)_0 \geqslant t\|u\|_0^2$, $\quad \sigma > 0$ при $t > 0$ и $\sigma = 0$ при $\partial k / \partial u = 0$.

При дополнительных условиях на a_{sl} можно получить и аналоги теорем 6—9.

Замечания. 1) Сетка по каждому x_s может быть неравномерной. 2) Вместо разностных аппроксимаций аналогично рассматриваются и проекционно-разностные, например, типа [2, 7, 13, 15] и др. 3) Теоремы 3—9 допускают модификации на случай общих г.п. H. 4) Теоремы 1—10 при $\dot{Q} = H$ полезны и при анализе сходимости $\dot{p}\dot{u}$ к u, где u — обобщенное решение дифференциальной краевой задачи. 5) Из теорем 9 и 10 следует справедливость результата [5] в случае $N > 1$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. [2] J. P. Aubin, Bull. Soc. Math. France, 12 (1967). [3] В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений М., 1956. [4] H. F. Trotter, Pacific J. Math., 8, 887 (1958). [5] Н. С. Бахвалов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 5, 861, 1966. [6] М. И. Вишик, Тр. Моск. матем. общ., 12, 125 (1963). [7] Н. Н. Гудович, ДАН, 179, № 6, 1257 (1968). [8] Ю. А. Дубинский, УМН, 23, в. 1, 45 (1968). [9] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 188, № 5 (1969). [10] F. G. Dyakonov, J. Inst. Math. Appl., 7, № 1, 1 (1971). [11] Д. Каушилайте, В сборн. Вычислит. методы и программирование, 11, М., 1970. [12] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964. [13] P. G. Ciarlet, M. H. Schultz, R. S. Varga, Numer. Math., 13, № 1, 51 (1969). [14] W. V. Petryshyn, Illinois J. Math., 10, № 2, 255 (1966). [15] В. Г. Корнеев, Вестн. Ленингр. унив., № 1, 60 (1969).