Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

МАТЕМАТИКА

Э. М. СААК

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 11 XII 1970)

Устойчивость задачи Дирихле для уравнения Лапласа была исследована М. В. Келдышем ([1]). В данной работе аналогичный вопрос изучается для полигармонического уравнения с двумя независимыми переменными x и y.

Положим $D \equiv \partial / \partial x + i \partial / \partial y$. Через D^m будем обозначать m-ю итерацию оператора D. Рассмотрим ограниченную область E на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и введем скалярное произведение вещественных функций $u(z)$, $v(z)$:

$$\langle u, v\rangle_E = \int\limits_E D^m u \cdot \overline{D}^m v \, dE. \tag{1}$$

Здесь $\overline{D} \equiv (\partial / \partial x - i \partial / \partial y)$, $m \geqslant 1$ — фиксированное натуральное число, интегрирование происходит по мере Лебега. Обозначим через $L_2^{(m)}(E)$ гильбертово пространство классов вещественных функций, имеющих производные в смысле С. Л. Соболева до m-го порядка со скалярным произведением (1) и нормой $|u|_E = \langle u, u\rangle_E^{1/2}$. К одному классу относятся все функции, отличающиеся лишь на многочлен степени $(m-1)$. Чтобы это определение было корректным, доказываем лемму.

Лемма 1. *Если $u(z)$ — вещественная функция и $\langle u, u\rangle_E = 0$, то $u(z)$ — многочлен степени $(m-1)$ от x и y.*

Обозначим через $H_m L_2^{(m)}(E)$ подпространство пространства $L_2^{(m)}(E)$, состоящее из полигармонических в области E функций.

Пусть $f(z)$ — произвольный элемент из $L_2^{(m)}(E)$. Решение $u_f \in H_m L_2^{(m)}(E)$ задачи Дирихле для полигармонического уравнения

$$\Delta^m u \equiv D^m \overline{D}^m u = 0 \tag{2}$$

в области E при граничном условии $f(z)$ определим равенством

$$\langle u, f\rangle_E = \langle u, u_f\rangle_E, \tag{3}$$

где $u = u(z)$ — произвольный элемент из $H_m L_2^{(m)}(E)$. Соотношением (3) решение задачи Дирихле определено с точностью до слагаемого, являющегося многочленом степени $(m-1)$. Чтобы устранить указанную неопределенность, зададим функцию $g_E(\zeta, z) \in H_m L_2^{(m)}(E)$ (по ζ) равенством

$$\langle u(\zeta), K(\zeta - z)\rangle_E = \langle u(\zeta), g_E(\zeta, z)\rangle_E,$$

где u — произвольный элемент из $H_m L_2^{(m)}(E)$, а $K(z)$ — фундаментальное решение полигармонического уравнения

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2} |z|^{2m-2} \ln |z|,$$

и потребуем

$$t_{m, z_0} u_f = t_{m, z_0}[\tilde{f}(z) + \langle \tilde{f}(\zeta), G_E(\zeta, z)\rangle_E], \tag{4}$$

где $z_0 \in E$ — некоторая фиксированная точка; $t_{m,z_0}u$ — многочлен Тейлора степени $(m-1)$ для функции $u = u(x, y)$ и точки z_0; $\bar{f}(z)$ — любая функция из $L_2^{(m)}(E)$, совпадающая с $f(z)$ в некотором пограничном слое, не содержащем z_0 ни внутри, ни на границе, и полигармоническая (например, равная нулю) в окрестности точки z_0; наконец, $G_E(\zeta, z)$ есть функция Грина области E для полигармонического оператора $G_E(\zeta, z) = K(\zeta - z) - g_E(\zeta, z)$.

Нетрудно заметить, что правая часть равенства (4) не зависит от выбора функции $\bar{f}(z)$, обладающей указанными свойствами.

Определение (3), (4), пригодное для любой области, в случае кусочно-звездных областей эквивалентно определению решения задачи Дирихле для полигармонического уравнения, данному в работе ([2]).

Введем также следующее определение. Пусть $\{E_n\}$ — произвольная последовательность областей, сходящаяся к области E в том смысле, что каждая точка области E, начиная с некоторого n, принадлежит всем E_n, а каждая точка, лежащая вне $\bar{E}$, начиная с некоторого n, лежит вне E_n. Пусть $u_{f,n}$ есть решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в области E_n. Если для любой всюду бесконечно гладкой функции $f(z)$ решения $u_{f,n}$ сходятся равномерно внутри области E (т. е. на каждом ее замкнутом подмножестве) к решению u_f задачи Дирихле в области E, то задачу Дирихле для полигармонического уравнения назовем у с т о й ч и в о й в области E.

Т е о р е м а. *Задача Дирихле для полигармонического уравнения устойчива в области E, если E — область Каратеодори* (см. ([4]), стр. 125) *и ее граница имеет плоскую меру нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Общий случай последовательности областей $\{E_n\}$ может быть сведен к случаю, когда последовательность $\{E_n\}$ сходится к E, убывая. Этот случай и будет рассмотрен.

Если $u(z)$ — полигармоническая функция в односвязной области E, то в силу (2) функция $\bar{D}^m$ и будет полианалитической и, следовательно, будет допускать представление

$$\bar{D}^m u = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \varphi_k(z), \tag{5}$$

где $\varphi_k(z)$ — однозначные аналитические в той же области функции (см. ([3]), стр. 173; ([5])). Обратно, всякая комбинация вида (5) будет полианалитической функцией.

Пусть $\chi_n(z)$ — функция, конформно отображающая область E_n на E, $\chi_n(z_0) = z_0$. В силу известной теоремы Каратеодори (([4]), стр. 39) функции $\chi_n(z)$ равномерно внутри E сходятся к z, когда $E_n \to E$. Наряду с функцией $F(z) = \bar{D}^m u$, заданной равенством (5), рассмотрим близкую к ней полианалитическую функцию

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{z}^k \varphi_k(\chi_n(z)) \chi_n'(z), \tag{6}$$

где $\chi_n'(z)$ — производная функции $\chi_n(z)$, $\chi_n'(z) \to 1$ при $E_n \to E$. Имеем, очевидно,

$$\int_{E_n} |F_n(z)|^2 dE_n = \int_E |F(z)|^2 dE, \tag{7}$$

причем интеграл справа существует, если $u \in H_m L_2^{(m)}(E)$, поскольку $F(z) = \bar{D}^m u$. Кроме того, функции $F_n(z)$ в силу (5) и (6) сходятся к $F(z)$ в области E, когда $E_n \to E$. В силу (7) это означает, что функция $F(z)$ является пределом функций $F_n(z)$ в смысле среднего квадратичного по области E. Обозначим через I операцию неопределенного интегрирования по комплексному переменному, а через I_m — ее m-ю итерацию. Вещественная функция

$$u_n(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\bar{z}^k}{2^m} I_m [\varphi_k(\chi_n(z)) \chi_n'(z)] + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{2^m} \overline{I_m [\varphi_k(\chi_n(z)) \chi_n'(z)]},$$

как легко видеть, удовлетворяет в области E_n уравнению

$$\bar{D}^m u_n = F_n(z)$$

и, следовательно, $u_n \in H_m L_2^{(m)}(E_n)$.

В силу предыдущего функция $u(z) \in H_m L_2^{(m)}(E)$ является пределом функций $u_n(z) \in H_m L_2^{(m)}(E_n)$ в смысле сходимости в пространстве $H_m L_2^{(m)}(E)$. Поэтому из теоремы Рунге следует теперь, что всякая m-гармоническая функция $u(z) \in H_m L_2^{(m)}(E)$ является пределом по норме этого пространства некоторой последовательности m-гармонических многочленов.

Функционал $u(z) - t_{m,z_0}u$, $z \in E$, является непрерывным в пространстве $H_m L_2^{(m)}(E)$. Поэтому пространство $H_m L_2^{(m)}(E)$ обладает воспроизводящей функцией $P_E(z, \zeta, z_0)$, определяемой соотношением

$$u(z) = t_{m,z_0}u + \langle u(\zeta), P_E(z, \zeta, z_0)\rangle_E, \quad z \in E, \tag{8}$$

где $u(z)$ — произвольная функция из $H_m L_2^{(m)}(E)$, $P_E(z, \zeta, z_0) \in H_m L_2^{(m)}(E)$ (по ζ), $t_{m,z_0} P_E(z, \zeta, z_0) = 0$, причем оператор t_{m,z_0} действует здесь на переменную ζ.

Можно доказать, что

$$\| P_E(z, \zeta, z_0)\|_E^2 = P_E(z, z, z_0), \quad z \in E, \tag{9}$$

где норма берется по ζ, и что

$$P_E(z, z, z_0) > P_{E_n}(z, z, z_0), \tag{10}$$

если $E_n \supset \bar{E}$.

Пусть $h(z)$ — произвольный m-гармонический многочлен. В силу (8) имеем

$$\lim_{E_n \to E} \langle h(\zeta), P_{E_n}(z, \zeta, z_0)\rangle_{E_n} = \langle h(\zeta), P_E(z, \zeta, z_0)\rangle_E.$$

Отсюда, используя абсолютную непрерывность интеграла Лебега и учитывая (9) и (10), получаем

$$\lim_{E_n \to E} \langle h(\zeta), P_{E_n}(z, \zeta, z_0)\rangle_E = \langle h(\zeta), P_E(z, \zeta, z_0)\rangle_E.$$

Это означает, что функция $P_E(z, \zeta, z_0)$ как функция от ζ является слабым пределом в пространстве $H_m L_2^{(m)}(E)$ функций $P_{E_n}(z, \zeta, z_0)$, когда $E_n \to E$.

Возвращаемся к решению рассматриваемой задачи. В силу (3) и (8) имеем

$$u_f(z) = t_{m,z_0}u_f + \langle f(\zeta), P_E(z, \zeta, z_0)\rangle_E.$$

Аналогичная формула справедлива для $u_{f,n}(z)$. Отсюда в силу предыдущего следует, что для любой всюду бесконечно гладкой функции $f(z)$ элементы $u_{f,n}$ сходятся слабо в пространстве $H_m L_2^{(m)}(E)$ к элементу u_f, когда $E_n \to E$. В частности, элементы $g_{E_n}(z, \zeta)$ слабо сходятся в $H_m L_2^{(m)}(E)$ (по ζ) к элементу $g_E(z, \zeta)$. Это позволяет доказать, что многочлены

$$t_{m,\, z_0}[\tilde{f}(z) + \langle \tilde{f}(\zeta),\, G_{E_n}(\zeta,\, z)\rangle_{E_n}] = t_{m,\, z_0} u_{f,\, n}$$

сходятся к многочлену

$$t_{m,\, z_0}[\tilde{f}(z) + \langle \tilde{f}(\zeta),\, G_E(\zeta,\, z)\rangle_E] = t_{m,\, z_0} u_f.$$

Теорема доказана.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило 4 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, УМН, 8, 171 (1940). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [3] И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948. [4] А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М., 1968. [5] Э. М. Саак, ДАН, 165, № 6, 1249 (1965).