Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 532.5 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. П. КАУШИЛАЙТЕ

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 14 XII 1970)

1. В настоящей работе изучается разностный аналог краевой задачи

$$L_\varepsilon(u_\varepsilon) \equiv -\nu\Delta u_\varepsilon + P(u_\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{grad}(\operatorname{div} u_\varepsilon) = f_\varepsilon \text{ на } \Omega, \qquad (1)$$
$$u_\varepsilon = 0 \text{ на } \Gamma$$

в ограниченной области Ω с границей Γ, где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $u_\varepsilon = (u_{\varepsilon1}, u_{\varepsilon2}, u_{\varepsilon3})$, ε — малый параметр,

$$P(u_\varepsilon) \equiv \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} u_{\varepsilon s}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_s} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_s}(u_{\varepsilon s}u_\varepsilon).$$

Эта задача получается из стационарной задачи Навье — Стокса [3]:

$$L(u) \equiv -\nu\Delta u + \sum_{s=1}^{3} u_s\frac{\partial u}{\partial x_s} + \operatorname{grad} p = f(x), \quad \operatorname{div} u = 0 \text{ на } \Omega,$$
$$u = 0 \text{ на } \Gamma \qquad (2)$$

заменой уравнения $\operatorname{div} u = 0$ на $\operatorname{div} u_\varepsilon = -\varepsilon p_\varepsilon$ и добавлением члена $\frac{1}{2}(\operatorname{div} u_\varepsilon)u_\varepsilon$ в $L(u)$ (см. [1]) и может рассматриваться как некоторая ее аппроксимация.

Для любой правой части $f_\varepsilon(x) \in L_2$ ($f_\varepsilon \equiv f$) получены теоремы существования хотя бы одного решения задачи (1) и ее разностного аналога; теоремы сходимости разностного метода и теорема сходимости решений задачи (1) к решению задачи (2) при $\varepsilon \to 0$. При некоторых ограничениях на область и функцию $f_\varepsilon(x)$ доказываются теоремы единственности и устанавливается сходимость итерационного процесса, рассмотренного в [2], как для решения разностного аналога исходной системы, так и для решения нелинейной системы, связывающей коэффициенты в методе Галеркина. При этом уменьшение погрешности начального приближения в ε^{-1} раз достигается с затратой $O(|\ln\varepsilon| h^{-7/2})$ арифметических действий в области общего вида и $O(|\ln\varepsilon||\ln h|h^{-3})$ в параллелепипеде. Такая же затрата арифметических действий требуется и для нахождения коэффициентов в методе Галеркина, если систему координатных функций выбрать специальным образом [4].

2. Рассмотрим пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ вектор-функций $w \equiv (w_1, w_2, w_3)$, норма в котором определяется следующим образом:

$$\|w\|_{W_2^1} = \left(\sum_{i=1}^{3}\sum_{s=1}^{3}\left\|\frac{\partial w_i}{\partial x_s}\right\|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{s=1}^{3}\left\|\frac{\partial w}{\partial x_s}\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Определение 1. Функция $u_\varepsilon \in W_2^1$ называется **обобщенным решением задачи (1)**, если для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{s=1}^{3}\left(\nu\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_s}, \frac{\partial v}{\partial x_s}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_s}u_{\varepsilon s} + \frac{\partial}{\partial x_s}(u_{\varepsilon s}u_\varepsilon)\right), v\right) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{div} u_\varepsilon, \operatorname{div} v) = (f_\varepsilon, v). \qquad (3)$$

Следуя работе (5), можно доказать, что имеет место

Теорема 1. *Пусть $f_\varepsilon(x)\in L_2$, тогда задача* (1) *разрешима и для любого ее решения имеет место априорная оценка*

$$\frac{\nu}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{W_2^1}+\frac{1}{\varepsilon}\|\operatorname{div}u_\varepsilon\|^2\leqslant K\|f_\varepsilon\|^2,$$

где константа K не зависит от ε.

Лемма 1. *Для любых функций* $u, v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ *имеет место неравенство*

$$|(P(u)-P(v),\ u-v)|\leqslant\delta_1(u)\|u-v\|^2_{W_2^1};\qquad \delta_1(u)=K_1\|u\|_{W_2^1}$$

с K_1, *зависящей лишь от* Ω.

Теорема 2. *Пусть* $\delta_0(u)=\nu-\delta_1(u)>0$, *тогда решение задачи* (1) *единственно, а последовательность приближенных решений по Галеркину* $\{u_\varepsilon^h\}$ *сходится к* u_ε *в метрике пространства* W_2^1.

Теорема 3. *Пусть* $f_\varepsilon(x)\in L_2$, $\varepsilon\to0$, *тогда* $\partial u_\varepsilon/\partial x_s$, $s=1,2,3$, *слабо, а* u_ε *сильно в* L_2 *сходятся к решению* u *задачи* (2). *Если* $\Gamma\in C^2$, *то* $\operatorname{grad}p_\varepsilon$ *слабо в* L_2 *сходится к* $\operatorname{grad}p$. *Если же* $\delta_0(u)>0$, *то* u_ε *сходится к* u *в метрике* W_2^1.

3. В пространстве $\mathbf{R}^3$ построим сетку S_h с шагом h по каждому из направлений x_s $(s=1,2,3)$. Введем обозначения: $\Omega_h\equiv S_h\cap\Omega$, $\Omega_h\equiv\{x\colon x,\ x+he_s,\ x-he_s\in\bar\Omega_h\}$, $s=1,2,3$, $\Gamma_h\equiv\bar\Omega_h\setminus\Omega_h$.

Пусть гильбертовы пространства H и $H_{\tilde B^h}$ состоят из сеточных вектор-функций $w^h\equiv(w_1^h,w_2^h,w_3^h)$, заданных на Ω_h и $w=0$ вне Ω_h со следующими скалярными произведениями: $(u^h,v^h)\equiv h^3\sum\limits_{\Omega_h}\sum\limits_{i=1}^3 u_i^h v_i^h$; $(u^h,v^h)_{\tilde B^h}\equiv\sum\limits_{s=1}^3\sum\limits_{i=1}^3(\partial_s u_i,\partial_s v_i)$, где $\tilde B^h\equiv-\Delta^h\equiv-\sum\limits_{s=1}^3\bar\partial_s\partial_s$, $\partial_s w^h(x)\equiv\frac1h[w^h(x+he_s)-w^h(x)]$, $\bar\partial_s w^h(x)\equiv\frac1h[w^h(x)-w^h(x-he_s)]$. В дальнейшем понадобятся также операторы

$$\tilde\partial_s\equiv{}^1/_2[\partial s+\bar\partial s],\qquad \operatorname{div}^h w^h\equiv\partial_1w_1^h+\partial_2w_2^h+\partial_3w_3^h$$

$$\overline{\operatorname{div}}{}^h w^h\equiv\bar\partial_1 w_1^h+\bar\partial_2w_2^h+\bar\partial_3w_3^h,\qquad P^h(w^h)\equiv{}^1/_2\sum_{s=1}^3(w_s^h\tilde\partial_s w^h+\tilde\partial_s(w_s^h w^h)).$$

$$\operatorname{grad}^h\operatorname{div}^h w^h\equiv(A_1,A_2,A_3),\qquad A_r\equiv{}^1/_2\partial_r(\overline{\operatorname{div}}{}^h w^h)+{}^1/_2\bar\partial_r(\operatorname{div}^h w^h).$$

Исходную задачу аппроксимируем разностной задачей:

$$L_\varepsilon^h(u_\varepsilon^h)\equiv-\nu\Delta^h u_\varepsilon^h+P^h(u_\varepsilon^h)-\frac1\varepsilon\operatorname{grad}^h(\operatorname{div}^h u_\varepsilon^h)=f_\varepsilon^h \text{ на } \Omega_h,\ u_\varepsilon^h=0 \text{ вне } \Omega_h. \tag{4}$$

Теорема 4. *Существует по крайней мере одно решение задачи* (4). *Для любого ее решения имеет место априорная оценка*

$$\frac\nu2\|u_\varepsilon^h\|^2_{\tilde B^h}+\frac1{2\varepsilon}(\|\overline{\operatorname{div}}{}^h u_\varepsilon^h\|+\|\operatorname{div}^h u_\varepsilon^h\|^2)\leqslant K_2\|f_\varepsilon^h\|^2$$

с константой K_2, *не зависящей ни от* ε, *ни от* h.

Лемма 2. $|(P^h(u^h)-P^h(v^h),\ u^h-v^h)|\leqslant K_3\|u^h\|_{\tilde B^h}\|u^h-v^h\|^2_{\tilde B^h}$ *для любых функций* $u^h,v^h\in H_{\tilde B^h}$ *с константой* K_3, *не зависящей от* h.

Лемма 3. *Для любых функций* $u^h,v^h\in H_{\tilde B^h}$ *имеют место соотношения*

$$(L_\varepsilon^h(u^h)-L_\varepsilon^h(v^h),\ u^h-v^h)\geqslant\delta_0(\|u^h\|)\|u^h-v^h\|^2_{\tilde B^h}; \tag{5}$$

$$\|(\tilde B^h)^{-1}(L_\varepsilon^h(u^h)-L_\varepsilon^h(v^h))\|^2_{\tilde B^h}\leqslant\delta_1(\|u^h\|,\|u^h-v^h\|)\|u^h-v^h\|^2_{\tilde B^h}, \tag{6}$$

где $\delta_0(\|u^h\|) = \nu - K_3\|u^h\|_{\widetilde{B}^h}$, $\delta_1(\|u^h\|, \|u^h - v^h\|) = \left[\nu + K_4\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|u^h\|_{\widetilde{B}^h} + \right.\right.$ $\left.\left. + \|u^h - v^h\|_{\widetilde{B}_h}\right)\right]^2$, *а* K_3 *и* K_4 *не зависят от* h *и* ε.

Теорема 5. *Если в оценке* (5) $\delta_0(\|u^h\|) > 0$, *то решение задачи* (4) *единственно.*

Лемма 4. *Для любых функций* u^h, $z^h \in H_{\widetilde{B}h}$ *справедливы неравенства*

$$\sigma_0(\|u^h\|)\|z^h\|^2_{\widetilde{B}h} \leqslant (Q^h_u z^h, z^h) \leqslant \sigma_1(\|u^h\|)\|z^h\|^2_{\widetilde{B}h},$$

$$\|(\widetilde{B}^h)^{-1} R^h_u z^h\|^2_{\widetilde{B}h} \leqslant \sigma_2(\|u^h\|)\|z^h\|^2_{\widetilde{B}h},$$

с $\sigma_0 = \nu - K_5\|u^h\|_{\widetilde{B}h}$, $\sigma_1 = \nu + K_6\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|u^h\|_{\widetilde{B}h}\right)$, $\sigma_2 = K_7\|u^h\|^2_{\widetilde{B}h}$ *и константами* K_i, *не зависящими от* h *и* ε, *где*

$$Q^h_u \equiv {}^1/_2(L^{h'}_{\varepsilon u} + (L^{h'}_{\varepsilon u})^*), \quad R^h_u \equiv {}^1/_2(L^{h'}_{\varepsilon u} - (L^{h'}_{\varepsilon u})^*),$$

$L_{\varepsilon u}^{h'}$ — *производная Фреше от оператора* L_ε^h.

Построим функции u_ε^h ее полилинейное восполнение $\widetilde{u}_\varepsilon^h$ (см. [6]). Тогда справедлива

Теорема 6. *Из множества* $\{\widetilde{u}_\varepsilon^h\}$ *можно выбрать подпоследовательность такую, что сама она сильно, а первые производные слабо в* L_2 *сходятся к решению задачи* (1).

Теорема 7. *Если область — параллелепипед, погрешность аппроксимации граничных условий равна* 0 *и в оценке* (5) $\delta_0(\|u^h\|) > 0$, *то* $(-\Delta^h e^h, e^h)^{1/2} = O(h^2)$, *где* $e^h = (u_\varepsilon)_h - u_\varepsilon^h$, $(u_\varepsilon)_h$ — *значение решения задачи* (1) *в соответствующей точке.*

Если же область общего типа, в оценке (5) $\delta_0 > 0$ *и погрешность аппроксимации граничных условий есть* $O(h)$, *то* $(B^h e^h, e^h) = O(h)$.

4. Для решения операторного уравнения $L_\varepsilon^h(u_\varepsilon^h) = \widetilde{f}_\varepsilon^h$ (в $\widetilde{f}_\varepsilon^h$ учитывается f_ε^h и $u_\varepsilon^h = 0$ на Γ_h) рассмотрим итерационный процесс вида

$$B_n w^{n+1} = B_n w^n - \gamma(L^h_\varepsilon(w^n) - \widetilde{f}^h_\varepsilon), \quad B_n = B = \widetilde{B}^h(E - T_M)^{-1} \tag{7}$$

(см. [2]).

Теорема 8. *Пусть справедливо утверждение леммы* 3 *с* $\delta_0 > 0$ *или леммы* 4 *с* $\sigma_0 > 0$.

Тогда можно найти такие итерационные параметры γ_1 *и* γ_2, *что справедливы неравенства* $\|u_\varepsilon^h - w^{n+1}\|_B^2 \leqslant \rho_i^n \|u_\varepsilon^h - w^0\|_B^2$ *для любого* w^0 *с* $\rho_i < 1$, $i = 1, 2$, *соответственно. Для уменьшения исходной погрешности в* ε^{-1} *раз требуется* $O(|\ln\varepsilon|h^{-7/2})$ *или* $O(|\ln\varepsilon|\cdot|\ln h|h^{-3})$ *арифметических действий в области общего вида и параллелепипеде соответственно* (см. [2, 7]).

5. Рассмотрим пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ комплексозначных вектор-функций $w \equiv (w_1, w_2, w_3)$ и исходя из некоторого натурального числа k $(1 \leqslant n \leqslant k)$ и системы линейно независимых функций $\psi_n(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1$ применим метод Галеркина для решения системы (1). Решение u_ε ищется в виде $u_\varepsilon^{(k)} = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i\psi_i(x)$. Для определения a_i требуется решить нелинейную систему

$$(L_\varepsilon(u_\varepsilon^{(k)}), \quad \overline{\psi_i(x)}) = (f_\varepsilon, \overline{\psi_i(x)}), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

которую в сокращенном виде запишем как $\hat{L}_\varepsilon(a) = b$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Так как оператор L_ε имеет производную Фреше L_ε', симметрическая и кососимметрическая части которой обозначены через Q и R соответственно, и для этих операторов справедливы утверждения, аналогичные утверждениям леммы 4, то отсюда следует

Теорема 9. *Можно указать две константы* α *и* β $\alpha = \alpha(\nu, \Omega, f_\varepsilon)$, $\beta = \beta(\nu, \varepsilon, \Omega, f_\varepsilon)$ *такие, что*

$$\hat{Q} \geqslant \alpha \hat{B}, \quad -\hat{R}\hat{B}^{-1}\hat{R} \leqslant \beta \hat{B} \quad (B = -\Delta),$$

где $\hat{Q}, \hat{B}, \hat{R}$ *получены тем же способом, что и* $\hat{L}_\varepsilon$ *(см.* [7]*).*

Сходимость итерационного процесса (7) для нахождения a_i следует из теоремы 8.

Если систему координатных функций выбрать специальным образом (см. [4]), то число арифметических действий, требуемое для уменьшения начального приближения $\|a - a^0\|$ в ε^{-1} раз, есть $O(|\ln \varepsilon| h^{-7/2})$ или $O(|\ln \varepsilon| |\ln h|^{-3})$ в области общего вида и параллелепипеде соответственно.

Замечание. Был рассмотрен случай краевых условий типа Дирихле. Если же взять периодическую функцию $f_\varepsilon(x)$ в области $0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1$, $-\infty \leqslant x_3 \leqslant \infty$ и условие периодичности для решения, то все утверждения сохраняются.

Настоящая работа проделана при постоянной помощи Е. Г. Дьяконова, которому я выражаю искреннюю благодарность.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Temam, Bull. Soc. Math., France, 96 (1968). [2] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 188, № 5 (1969). [3] О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., 1961. [4] Ю. К. Демьянович, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., 8, 1 (1968). [5] Ю. А. Дубинский, УМН, 23, в. 1, 45 (1968). [6] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, М., 1953. [7] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 198, № 5 (1971).