Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 539.385

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Д. КЛЯЧКО

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С ПОСТОЯННЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПЛОЩАДИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО АНИЗОТРОПНОГО УПРУГО-ВЯЗКОГО СТЕРЖНЯ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 30 XI 1970)

Показывается, что преобразование с независящим от координат коэффициентом изменения площади «переводит» задачу кручения одного упруго-вязкого неоднородного анизотропного стержня в задачу кручения другого упруго-вязкого стержня, тоже в общем случае неоднородного и анизотропного. При этом параметры «новой» задачи, которые перед решением должны быть известны,— контур, характеристики материала, угол закручивания — выражаются через задаваемые величины исходной задачи и наоборот, что позволяет использовать рассматриваемые преобразования для моделирования. В частных случаях неоднородности и анизотропии задача может быть сведена к однородному изотропному стержню.

Рассмотрим случай чисто упругого материала. Пусть имеется задача о кручении неоднородного анизотропного цилиндрического стержня с произвольным поперечным сечением (для простоты полагаем, что оно односвязно). Пусть x^1, x^2 — произвольные криволинейные координаты в поперечном сечении, ось x^3 параллельна образующей цилиндрической поверхности стержня. В каждой точке материал имеет плоскость упругой симметрии, перпендикулярную x^3. Матрица тензора упругости A_{ij} $(i, j = 1, 2)$, входящая в закон Гука,

$$\varepsilon_{i3} = A_{ij}\sigma^{j3}, \tag{1}$$

является произвольной функцией точки поперечного сечения и не меняется по длине стержня. Задачу рассматриваем в представлении с помощью функции напряжений φ. На контуре $\varphi = 0$.

Заметим, что поскольку в задаче кручения участвуют не все отличные от нуля компоненты тензора упругости, то ясно, что заданное поле A_{ij} охватывает множество различных материалов, отличающихся не участвующими в задаче компонентами (это отмечается, например, в ([1])). Такие материалы моделируют друг друга, причем без всякого геометрического преобразования. Рассмотрим моделирование, при котором меняется лишь A_{ij}.

Для удобства введем тензор **B**, матрица которого связана с матрицей тензора **A** в прямолинейной ортонормированной системе координат зависимостью

$$B^{11} = A_{22}, \quad B^{12} = B^{21} = -A_{12} = -A_{21}, \quad B^{22} = A_{11}. \tag{2}$$

Уравнение задачи кручения, записанное в известной ковариантной относительно произвольного преобразования координат форме,

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}B^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\right) = -\alpha = \mathrm{const} \tag{3}$$

(здесь $g = \det|g_{ij}|$, α — заданный угол закручивания), очевидно, сохраняет свой вид при произвольном преобразовании координат

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x), \tag{4}$$

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x), \tag{5}$$

$$\bar{B}^{ij}(\bar{x}) = B^{kl}(x)\,(\partial\bar{x}^i / \partial x^k)\,(\partial\bar{x}^j / \partial x^l), \tag{6}$$

$$\bar{\alpha} = \alpha, \tag{7}$$

$$\bar{g}(\bar{x}) = g(x) \Big/ \left(\frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^1, x^2)}\right)^2. \tag{8}$$

Здесь и в дальнейшем черточкой сверху обозначены новые величины и $f(x) \equiv f(x^1, x^2)$. Но из уравнения видно, что каждому преобразованию, для которого

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{g(\bar{x})}{\bar{g}(\bar{x})}\right) = 0, \tag{9}$$

можно придать и второй физический смысл — смысл перехода в старой координатной системе к новому телу, к новой задаче кручения. Таким образом, каждое преобразование с не зависящим от координат коэффициентом изменения площади «переводит» задачу кручения одного стержня в задачу кручения другого стержня. Если исходная система координат выбрана так, что $g = \text{const}$, то (9) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial(\bar{x}^1, \bar{x}^2)}{\partial(x^1, x^2)}\right) = 0, \tag{10}$$

решение которого в параметрической форме известно (Гаусс, Граве, Шефферс, Картан).

Таким образом, если нам задан конкретный анизотропный стержень, для которого неудобно определить функцию φ, мы имеем право согласно (9) и (10) выбрать другой стержень, контур поперечного сечения которого получается из контура исходного стержня под действием преобразования с постоянным коэффициентом изменения площади, провести на нем исследование, а затем результаты пересчитать обратно на исходный стержень. Крутящий момент согласно (5) преобразуется как площадь. Анизотропия модели должна быть связана с анизотропией натуры зависимостью (6). В ряде случаев модель оказывается проще натуры.

В преобразования (4)—(7) можно ввести коэффициенты обычного линейного подобия. Это расширяет возможности моделирования.

З а м е ч а н и е. Уравнения, а также начальные и граничные условия физической задачи, будучи записаны в форме, ковариантной относительно заданной группы преобразований координат, сохраняют, разумеется, свой вид при всех преобразованиях группы. Поэтому преобразованиям этой группы, не нарушающим некоторых ограничений физического характера, можно было бы придавать второй смысл — смысл перехода к новым физическим задачам этого же класса, но в старой координатной системе.

Однако при преобразованиях координат, за исключением группы движений, $g_{ij}(x)$ переходит в $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$, а не в $g_{ij}(\bar{x})$, как это нужно для перехода к новой задаче в старой координатной системе. Отсюда ясно, что из не нарушающих ограничения «годятся» только те преобразования, для которых существует дополнительное преобразование (без преобразования независимых переменных), после которого вид уравнений сохранится и в них будет фигурировать уже $g_{ij}(\bar{x})$. Кроме того, чтобы преобразование можно было использовать для моделирования, задаваемые перед решением величины модели и прототипа должны с его помощью выражаться одни через другие.

Заметим также, что если отказаться от требования принадлежности задач к одному физическому классу, то любое преобразование можно, вообще говоря, истолковать как переход к некоторой новой физической задаче (об этом см. также [2]).

Поставим вопрос, пригодны ли два заданных неоднородных анизотропных материала для взаимного моделирования с помощью предлагаемого преобразования. Введем в материалах общую или две одинаковые с точностью до смещения и поворота системы координат и экспериментально определим характеристики материалов $B^{ij}(x)$ и $\bar{B}^{ij}(\bar{x})$.

Для моделируемости, во-первых, необходимо, чтобы уравнение (6) имело решение и, во-вторых, чтобы это решение удовлетворяло условию (9) или (10). Существование решения (6) с геометрической точки зрения эквивалентно одинаковости двумерных римановых пространств, для которых $B^{ij}(x)$ и $\bar{B}^{ij}(\bar{x})$ являются матрицами (в каких-то координатных системах) метрических тензоров. Решение этого вопроса известно. В частности, неоднородные анизотропные стержни моделируются с помощью нашего преобразования однородными изотропными, если тензорные поля $B^{ij}(x)$ таковы, что, во-первых, уравнение

$$B^{ij}(x)\,(\partial \bar{x}^k / \partial x^i)\,(\partial \bar{x}^l / \partial x^j) = g^{kl}(\bar{x})\,B \tag{11}$$

имеет решение, т. е. гауссова кривизна равна нулю, и, во-вторых, это решение удовлетворяет (9) или (10). В уравнении (11) $g^{ij}(x)$ — матрица метрического тензора эвклидова пространства во введенной системе координат, B — произвольная константа, размерность которой равна размерности B^{ij}.

Совершенно очевидно, что все сказанное справедливо и для подобия между стержнями из линейно упруго-вязких неоднородных анизотропных материалов соответствующей симметрии:

$$\varepsilon_{i3}(t) = \int_0^t A_{ij}(t,\ t^*)\,\sigma^{j3}(t^*)\,dt^*. \tag{12}$$

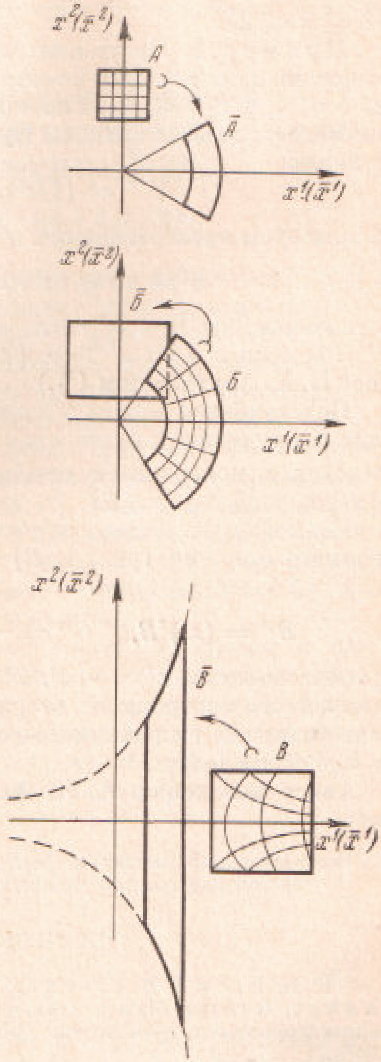

Рис. 1

Приведем примеры моделирования неоднородных анизотропных стержней однородными изотропными. В примерах x^1, x^2 — прямолинейная ортонормированная и θ, r — полярная системы координат.

Пример 1. Задача кручения неоднородного прямолинейного ортотропного стержня (рис. 1, A) квадратного поперечного сечения ($-{}^1/_2 \leqslant x^1 \leqslant {}^1/_2$, $1 \leqslant x^2 \leqslant 2$) с характеристиками материала

$$B^{11} = \frac{1}{2x^2}B, \quad B^{12} = 0, \quad B^{22} = 2x^2 B \tag{13}$$

преобразованием

$$\bar{x}^1 = |\sqrt{2x^2}|\cos x^1, \quad \bar{x}^2 = |\sqrt{2x^2}|\sin x^1, \tag{14}$$

продолженным в соответствии с (5)—(7), «переводится» в задачу кручения изотропного однородного стержня

$$\bar{B}^{ij} = \delta^{ij} B \tag{15}$$

с поперечным сечением (рис. 1, $\bar{A}$) в виде сектора кольца ($-{}^1/_2 \leqslant \bar{\theta} \leqslant {}^1/_2$, $\sqrt{2} \leqslant \bar{r} \leqslant 2$).

Пример 2. Пусть имеется неоднородный криволинейно ортотропный стержень с поперечным сечением (рис. 1, $Б$) в виде сектора кольца ($-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, $1 \leqslant r \leqslant 2$). Главные направления ортотропии совпадают с линиями $\theta = \mathrm{const}$, $r = \mathrm{const}$. Пусть в локальной нормированной системе координат

$$B^{rr} = (1/r^2)B, \quad B^{r\theta} = 0, \quad B^{\theta\theta} = r^2 B. \tag{16}$$

Используем преобразование, обратное (14):

$$\bar{x}^1 = \operatorname{arctg}(x^2/x^1), \quad \bar{x}^2 = {}^1/_2[(x^1)^2 + (x^2)^2], \tag{17}$$

с условием, что $0 < \bar{x}^1 < \pi$, если $x^2 > 0$; $-\pi < \bar{x}^1 < 0$, если $x^2 < 0$; $\bar{x}^1 = 0$, если $x^2 = 0$, $x^1 > 0$. (Это преобразование с другой целью применялось Н. Х. Арутюняном ([3]).)

Подстановкой можно убедиться, что преобразование (17) «переводит» задачу кручения данного стержня в задачу для однородного изотропного стержня с поперечным сечением (рис. 1, $\bar{Б}$) в виде прямоугольника ($|\bar{x}^1| \leqslant 1$, ${}^1/_2 \leqslant \bar{x}^2 \leqslant 2$).

Пример 3. Задача кручения неоднородного криволинейного ортотропного стержня (рис. 1, $В$) с квадратным поперечным сечением ($2 \leqslant x^1 \leqslant 4$, $|x^2| \leqslant 1$) и

$$B^{11} = (x^1)^2 B, \quad B^{12} = -x^1 x^2 B, \quad B^{22} = [1/(x^1)^2 + (x^2)^2]B \tag{18}$$

преобразованием $\bar{x}^1 = \ln x^1$, $\bar{x}^2 = x^1 x^2$ «переводится» в задачу кручения однородного изотропного стержня с поперечным сечением (рис. 1, $\bar{В}$) в виде трапеции с криволинейными боковыми сторонами ($\bar{x}^1 = \ln 2$, $\bar{x}^1 = \ln 4$, $\bar{x}^2 = \pm \exp \bar{x}^1$).

Автор благодарен А. Я. Александрову за советы при выполнении работы.

Новосибирский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
8 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. K. Brown, E. E. Jones, Quart. Appl. Math., 26, № 2, 273 (1968). [2] С. Д. Клячко, В сборн. Матер. к научно-технич. конфер. Новосибирск. инст. инженеров железнодорожного транспорта, 1970. [3] Н. Х. Арутюнян, ПММ, **11**, в. 5, 543 (1947).