Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

В. А. КУРЧАТОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 XI 1970)

Одним из самых распространенных и эффективных методов численного решения нелинейных функциональных уравнений вида $P(x)=0$ является метод Ньютона. Рассматриваемый в статье метод линейной интерполяции численного решения нелинейных функциональных уравнений так же прост, как и метод Ньютона, обладает такой же скоростью сходимости, но в отличие от него не содержит оператора $P'(x)$. Поэтому его удобно применять в тех случаях, когда применение методов типа Ньютона, содержащих $P'(x)$, нежелательно (например, при сложном аналитическом выражении производной $P'(x)$).

В отличие от классического метода хорд [1] и метода хорд с одним закрепленным узлом [2], рассматриваемый метод имеет более высокую скорость сходимости — квадратичную, а по сравнению с методом хорд, построенных по узлам Чебышева [3], обладает большей простотой и экономичностью, так как нет необходимости на каждом шаге итераций находить узлы Чебышева.

1°. Пусть $P(x)=0$ — функциональное уравнение, имеющее единственный корень x^* в некоторой области $R=\{\|x-x^*\|\leqslant\eta\}$, $\eta=\mathrm{const}>0$, а операция $P(x)$ переводит элементы нормированного пространства X типа B в элементы нормированного пространства Y того же типа.

Рассмотрим итерационный метод решения функциональных уравнений:

$$x_{n+1}=x_n-H^{-1}(x_{n-1},x_n)P(x_n),\quad n=1,2,3,\ldots,\tag{1,1}$$

где линейная операция $H(x_{n-1},x_n)$ зависит только от элементов x_{n-1}, x_n, причем

$$\|P'(x_n)-H(x_{n-1},x_n)\|=\|P_n^*-H_n\|\leqslant{}^1/_6\|x_n-x_{n-1}\|^2\|P'''(x)\|_R.\tag{1,2}$$

На случай одного переменного рассматриваемый метод допускает простую геометрическую интерпретацию: за приближенное значение корня принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, построенного с помощью элементов x_{n-1}, x_n и аппроксимирующего $P'(x_n)$ с погрешностью $O(\|x_{n-1}-x_n\|^2)$.

Сходимость процесса (1,1) и оценка скорости сходимости устанавливается следующей теоремой.

Т е о р е м а. *Если:*

1) *для приближения x_0 существует обратная операция* $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$,

2) *в области R*

$$\|P''(x)\|\leqslant M,\quad \|P'''(x)\|\leqslant N,$$

то при x_0, x_1, достаточно близких к корню x^*, процесс (1,1) *сходится к корню со скоростью, характеризуемой неравенством*

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant C\|x_n-x^*\|^2,\quad n=1,2,3,\ldots,\tag{1,3}$$

где C — некоторая ограниченная положительная постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала, что для x_{n-1}, x_n, достаточно близких к x_0, существует обратная операция H_n^{-1}. Доказательство проведем аналогично [4].

Для x_{n-1}, x_n, достаточно близких к x_0, имеем

$$\|\Gamma_0(P_0' - H_n)\| \leqslant \|\Gamma_0\|\{\|x_n - x_0\|M + {}^1/_6\|x_{n-1} - x_n\|^2 N\} = h_n < 1.$$

Из полученного, согласно известной теореме Банаха, следует существование обратной операции $\Gamma_n = [I - \Gamma_0(P_0' - H_n)]^{-1}$ и $\|\Gamma_n\| \leqslant 1/(1-h_n)$. Таким образом, операция $\Gamma_0\Gamma_n = H_n^{-1}$ существует и $\|H_n^{-1}\| \leqslant \leqslant \|\Gamma_0\|/(1-h_n)$. Установим теперь сходимость рассматриваемого метода и получим оценку скорости сходимости. Вычитая из левой и правой части равенства (1,1) элемент x^* и используя

$$P_n - P'(x^*)(x_n - x^*) = \varepsilon_n, \quad \|\varepsilon_n\| \leqslant {}^1/_2\|x_n - x^*\|^2 M,$$

имеем

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \|x_n - x^*\|\|I - H_n^{-1}P'(x^*)\| + \|H_n^{-1}\|\|\varepsilon_n\|;$$

и поскольку

$$\|I - H_n^{-1}P'(x^*)\| \leqslant \|H_n^{-1}\|\{{}^1/_6\|x_{n-1} - x_n\|^2 N + \|x_n - x^*\|M\},$$

то

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \|x_n - x^*\|\|H_n^{-1}\|\{{}^1/_6\|x_n - x_{n-1}\|^2 N + M\|x_n - x^*\|(1 + {}^1/_2\|x_n - x^*\|)\}. \tag{1,4}$$

Из неравенства (1,4) следует, что скорость сходимости рассматриваемого метода, вообще говоря, не превысит квадратичной, поэтому бесконечно малая величина $\|x_{n-1} - x^*\|^2$, $n \to \infty$, не низшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\|x_n - x^*\|$, $n \to \infty$, следовательно,

$$\|x_n - x_{n-1}\|^2 \leqslant c\|x_n - x^*\|, \quad 0 < c = \text{const} < \infty. \tag{1,5}$$

Учитывая (1,5), из (1,4) получим (1,3). Теорема доказана.

2°. Рассмотрим некоторые применения метода (1,1).

1. Пусть $P(x) = 0$ — вещественное уравнение. Выбрав

$$H_n = \frac{P(2x_n - x_{n-1}) - P(x_{n-1})}{2(x_n - x_{n-1})},$$

получим метод приближений для решения вещественных уравнений

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(2x_n - x_{n-1}) - P(x_{n-1})}{2(x_n - x_{n-1})}P(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2,1}$$

по отношению к которому, вследствие того что H_n удовлетворяет условию (1, 2), справедлива доказанная теорема.

Метод (2, 1) имеет простую геометрическую интерпретацию, аналогичную классическому методу хорд.

По методу (2,1) за приближенное значение корня принимается корень интерполяционного многочлена первой степени, построенного по точкам $2x_n - x_{n-1}$, x_{n-1}.

2. Применим метод (1,1) к решению систем m вещественных уравнений с m неизвестными,

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_m) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, m. \tag{2,2}$$

В этом случае операция H_n представляется матрицей

$$H_n = \|h_{ki}^{(n)}\| = \left\| \frac{f_k(\xi_1^{(n)}, \ldots, 2\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n)}) - f_k(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_i^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n)})}{2(\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n-1)})} \right\|,$$
$$k, i = 1, 2, \ldots, m,$$

в которой по добавочному условию функция $h_{kj}^{(n)}(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$ при $\xi_j^{(n)} =$

$= \xi_j^{(n-1)}$ равна $\dfrac{\partial f_k}{\partial \xi_j}(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$. При таком условии в силу

$$\lim_{\xi_j^{(n)} \to \xi_j^{(n-1)}} \frac{f_k(\xi_1^{(n)}, \ldots, 2\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n)}) - f_k(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_j^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n)})}{2(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})} =$$

$$= \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j}(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$$

функция $h_{kj}^{(n)}(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$ будет непрерывна (см., например, ([5]), стр. 147), и матрица H_n, как видно, удовлетворит условию (1, 2). Отметим что при решении конкретных задач в случае $\xi_j^{(n)} = \xi_j^{(n-1)}$ с целью избежать вычисления производной $\dfrac{\partial f_k}{\partial \xi_j}(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)})$, при сложном аналитическом выражении ее, можно вместо приближения $\xi_j^{(n)}$, равного $\xi_j^{(n-1)}$ взять любое $\tilde{\xi}_j^{(n)}$, близкое к $\xi_j^{(n)}$, что, очевидно, не окажет существенного влияния на скорость сходимости итерационного процесса.

Последовательные приближения для корня в случае (2,2) определяются из системы уравнений для поправок

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{f_k(\xi_1^{(n)}, \ldots, 2\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n)}) - f_k(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_i^{(n-1)}, \ldots, \xi_m^{(n)})}{2(\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(n-1)})} (\xi_i^{(n+1)} -$$

$$- \xi_j^{(n)}) = - f_k(\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_m^{(n)}).$$

3. Рассмотрим теперь нелинейное интегральное уравнение

$$P(x) = x(s) - \int_0^1 K(s, t, x(t))\, dt = 0,$$

где $K(s, t, x(t))$ — непрерывная функция своих аргументов, трижды дифференцируема по x.

В этом случае, как нетрудно видеть, приближение x_{n+1} должно определяться из линейного интегрального уравнения

$$x_{n+1}(s) - x_n(s) - \int_0^1 h^{(n)}(s, t)\{x_{n+1}(t) - x_n(t)\}\, dt = \int_0^1 K(s, t, x_n(t))\, dt - x_n(s), \tag{3,1}$$

$$h^{(n)}(s, t) = \frac{K(s, t, 2x_n(t) - x_{n-1}(t)) - K(s, t, x_{n-1}(t))}{2(x_n(t) - x_{n-1}(t))},$$

причем полагаем, что функция $h^{(n)}(s, t)$ при значениях $t = t_k$, в которых $x_n(t) - x_{n-1}(t)$ обращается в нуль, равна $K_x'(s, t_k, x_n(t_k))$. При таком условии в силу

$$\lim_{t \to t_k} \frac{K(s, t, 2x_n(t) - x_{n-1}(t)) - K(s, t, x_{n-1}(t))}{2(x_n(t) - x_{n-1}(t))} = K_x'(s, t_k, x_n(t_k))$$

ядро $h^{(n)}(s, t)$ непрерывно при всех $t \in [0, 1]$.

Уравнение (3,1) получаем из общей формулы (1,1), учитывая смысл H_n для данного случая.

Автор выражает глубокую благодарность акад. М. А. Лаврентьеву и акад. Л. В. Канторовичу за внимание к работе, а также Б. А. Вертгейму, сделавшему замечания, способствовавшие улучшению статьи.

Казанский химико-технологический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
20 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. С. Сергеев, Сиб. матем. журн., 2, № 2 (1961). [2] Е. Х. Драхлин, Сборн. научн. тр. Пермск. горн. инст., 2 (1958). [3] И. М. Дерендяев, ДАН, 120, № 1 (1958). [4] Л. В. Канторович, УМН, 6, № 3 (1948). [5] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1, М., 1966.