π -СИЛОВСКИЕ МНОЖЕСТВА И π -СВЕРХРАЗРЕШИМОСТЬ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Подгорная В.В.
канд. физ.-мат. наук, доцент
Учреждение образования «Гомельский государственный университет имени Ф.Скорины», Гомель, Республика Беларусь

Все рассматриваемые группы конечным. Через π будем обозначать множество простых чисел; а через π (G) – множество всех простых делителей порядка группы G. И пусть G_{p_i} – силовская p_i -подгруппа группы G.

Силовским множеством группы *G* называется множество силовских подгрупп из *G*, взятых по одной для каждого простого делителя порядка группы *G*, вместе с единичной подгруппой. Из теоремы Силова следует, что каждая группа G обладает силовским множеством Σ. Если $G_{p_i} G_{p_j} = G_{p_j} G_{p_i}$ для всех силовских подгрупп из Σ, то силовское множество превращается в силовскую систему, см. [1, глава VI, §2]. Известно, что любая разрешимая группа обладает силовской системой, и наоборот, если в группе имеется силовская система, то группа разрешима [2, теорема VI.2.3].

Пусть $\pi=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ – некоторое множество простых чисел, G – группа, в которой существует π'-холлова подгруппа $G_{\pi'}$, и $\pi \subseteq \pi(G)$. Множество $\Sigma^* =\{E, G_{p_1}, G_{p_2}, \ldots, G_{p_n}, G_{\pi'}\}$ называется π-силовским множеством группы G. Если множество $\pi=\pi(G)$, то получается определение силовского множества группы G.

При дополнительном условии попарной перестановочности всех подгрупп из π-силовского множества получаем π-силовскую систему. Из теоремы Ф. Холла следует, что любая π-разрешимая группа обладает π-силовской системой, и наоборот, если у группы есть π-силовская система, то группа π-разрешима.

Подгруппа H группы G называется Ω-квазинормальной или Ω-перестановочной, если $HX=XH$ для всех $X\in\Omega$. Если Ω – множество всех подгрупп группы G, то Ω-квазинормальную подгруппу называют квазинормальной или перестановочной подгруппой группы G.

Теорема 1. Пусть не простая группа G π-разрешима для некоторого множества простых чисел $\pi\subseteq\pi(G)$ с дисперсивной по Оре π-холловой подгруппой G_π, а Σ^* – её π-силовское множество. Если каждая субнормальная π-подгруппа группы G является Σ^*-квазинормальной, то группа G π-сверхразрешима.

Следствие 1. Пусть не простая группа G π-разрешима для некоторого множества простых чисел π с дисперсивной по Оре π-холловой подгруппой G_π, Σ^* – её силовская π-система. Если каждая субнормальная π-подгруппа группы G Σ^*-квазинормальна, то группа G π-сверхразрешима.

Следствие 2. Пусть группа G π-разрешима для некоторого множества простых чисел $\pi\subseteq\pi(G)$ с дисперсивной по Оре π-холловой подгруппой G_π, а Σ^* – её π-силовское множество. Если каждая циклическая примарная π-подгруппа группы G является Σ^*-квазинормальной, то группа G π-сверхразрешима.

Теорема 2. Пусть группа G=HK π-разрешима, где $\pi\subseteq\pi(G)$ – некоторое множество простых чисел, подгруппы H и K – π-сверхразрешимы, и пусть Σ^*_H, Σ^*_K – некоторые π-силовские множества подгрупп H и K соответственно. Если каждая циклическая примарная π-подгруппа из H Σ^*_K-квазинормальна, а циклическая примарная π-подгруппа из K Σ^*_H-квазинормальна, то группа G π-сверхразрешима.

Список использованных источников

1. Doerk, K. Finite soluble groups / K.Doerk, T. Hawkes. – Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1992. – 889 p.
2. Huppert, B. Endliche gruppen, I / B.Huppert. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1967. – 793p.