Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Ф. ТИМАН

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТИПА СВЕРТКИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 XII 1970)

Пусть $f(x)$ — периодическая периода 2π функция, принадлежащая к L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ на периоде, $\|f(x)\|_{L_p} = \left\{\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$ и

$$D(f;\,\sigma;\,h;\,p) = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-hu)\,d\sigma(u) \right\|_{L_p}, \tag{1}$$

где $\sigma(u)$ — некоторая действительная функция с ограниченным изменением (конечная мера) на вещественной оси $-\infty < u < \infty$. Интегралы типа (1) представляют известное обобщение некоторых конкретных преобразований, связанных с различными изучаемыми обычно характеристиками функций $f(x)$, и ранее в том или ином плане уже рассматривалось в литературе. В работах ([1], [2]) рассматривается вопрос о возможных соотношениях между величинами $D(f;\,\sigma;\,h;\,p)$ для двух различных мер. Настоящая заметка посвящена выяснению общих зависимостей между $D(f;\,\sigma;\,h;\,p)$ и наилучшими приближениями

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{C_\nu} \left\| f(x) - \sum_{\nu=-n}^{n} C_\nu e^{i\nu x} \right\|_{L_p},$$

учитывающих особенности случая, когда $1 < p < \infty$.

Ниже всюду предполагается, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u) = 0$.

Теорема 1. *Для каждой функции $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ при любом h $(0 < h < 1)$ справедливо неравенство*

$$D(f;\,\sigma;\,h;\,p) \leqslant A(\sigma,\,p) \left\{ \sum_{\nu=0}^{m} E^{\gamma}_{n_\nu - 1}(f)_{L_p}\, \delta^{\gamma}(n_\nu;\,h) + E^{\gamma}_{n_{m+1}}(f)_{L_p} \right\}^{1/\gamma}, \tag{2}$$

где $\gamma = \min(2,\,p)$, $n_0 = 1 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$, $n_{k+1}/n_k \geqslant q > 1$, $n_{m+1} \leqslant 1/h$, $A(\sigma,\,p)$ — *константа, зависящая только от σ и p*,

$$\delta(n_\nu;\,h) = \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} |\hat\sigma(kh) - \hat\sigma[(k+1)h]| + |\hat\sigma(n_\nu h)|,$$

$$\hat\sigma(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\,d\sigma(u).$$

В некотором смысле обратной к теореме 1 является

Теорема 2. *Пусть система чисел*

$$\lambda_{\mu,\nu}(h)=\begin{cases} |\hat\sigma(\mu h)|^{-1}\left(\sum\limits_{k=0}^{\nu-1}|\hat\sigma(n_kh)|^2\right)^{1/2}, & n_{\nu-1}\leqslant\mu<n_\nu-1,\\ & \nu=1,2,\ldots,m+1,\\ 0, & \mu\geqslant n_{m+1},\ n_{m+1}\leqslant 1/h\end{cases}$$

$(n_0=1<n_1<\ldots<n_k<\ldots,\ \ n_{k+1}/n_k\geqslant g>1)$ *удовлетворяет условиям*

$$|\lambda_{\mu,\nu}(h)|\leqslant c_1,\qquad \sum_{\mu=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}|\lambda_{\mu,\nu}(h)-\lambda_{\mu+1,\nu}(h)|\leqslant c_2.$$

Тогда для каждой функции $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$ *при любом* h $(0<<h<1)$

$$\left\{\sum_{k=0}^{m}|\hat\sigma(n_kh)|^\gamma E_{n_k}^\gamma(f)_{L_p}\right\}^{1/\gamma}\leqslant B(\sigma,p)\{D(f;\sigma;h;p)+E_{n_{m+1}}(f)_{L_p}\},\tag{3}$$

где $\gamma=\max(2,p)$, $B(\sigma,p)$ — *константа, зависящая только от* σ *и* p.

В ряде случаев неравенства (2) и (3) в смысле порядка являются окончательными.

Теорема 3. *Если* $\sigma(x)$ *при некотором* $r>0$ *удовлетворяет условию*

$$A_1|x|^r\leqslant|\hat\sigma(x)|\leqslant A_2|x|^r\quad(|x|\leqslant 1),\tag{4}$$

то какой бы ни была последовательность $\alpha_n\downarrow 0$, *можно указать функцию* $f_0(x)\in L_p(1<p<\infty)$, *для которой* $E_{n_k}(f)_{L_p}\asymp\alpha_{n_k}$ $(k=0,1,2,\ldots)$ *и неравенство* (3) *обращается в порядковое равенство.*

Теорема 4. *Если мера* $\sigma(x)$, *кроме* (4), *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}|\hat\sigma(kh)-\hat\sigma[(k+1)h]|\leqslant c|\hat\sigma(n_\nu h)|\tag{5}$$

$$(0<h<1,\ \nu=1,2,\ldots,m,\ n_{\nu+1}/n_\nu\geqslant g>1,\ n_{m+1}\leqslant 1/h),$$

то какой бы ни была последовательность $\alpha_n\downarrow 0$, *можно указать функцию* $f_0(x)\in L_p(1<p<\infty)$, *для которой* $E_{n_k}(f)_{L_p}\asymp\alpha_{n_k}$ $(k=0,1,2,\ldots)$, *и неравенство* (2) *обращается в порядковое равенство.*

Примером функции, существование которой утверждается в теоремах 3 и 4, может служить функция

$$f_0(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_{n_k}^2-\alpha_{n_{k+1}}^2)^{1/2}\cos n_kx,$$

или

$$f_0(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}n_k^{1/p-1}(\alpha_{n_k}^p-\alpha_{n_{k+1}}^p)^{1/p}\sum_{\nu=n_k}^{n_{k+1}-1}\cos\nu x,$$

где $n_{k+1}/n_k\geqslant g>1$ $(k=0,1,2,\ldots)$, $\alpha_n\downarrow 0$, в зависимости от значения p $(1<p<\infty)$.

При $p=\infty$ справедлива

Теорема 5. *Для всякой непрерывной периода* 2π *функции* $f(x)$ *имеет место неравенство*

$$D(f;\sigma;h;\infty)\leqslant A(\sigma)\left\{E_0(f)\rho(n_1;h)+\sum_{k=0}^{m}E_{n_k}(f)\rho(n_{k+1};h)\right\},\tag{6}$$

где $n_0 = 1 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots,\ n_{m+1} \leqslant 1/h,\ 0 < h < 1,$

$$\rho(n_k; h) = \int_0^{\pi} |F_{n_k}(h; \theta)|\, d\theta,$$

$$F_n(h; \theta) = \cos n\theta \left\{ {}^1/_2 \hat{\sigma}(nh) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \hat{\sigma}(\nu h) \cos(n-\nu)\theta \right\}.$$

Аналогичная оценка справедлива и при $p = 1$.

Отметим, что неравенства (2) и (3) обобщают оценки, полученные автором ранее в [3-5] для случаев, когда $\hat{\sigma}(x) = (1 - e^{-ix})^r$ (r — натуральное число),

$$\hat{\sigma}(x) = 1 - \hat{K}(x)$$

$$\left(\hat{K}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} K(u)\, du, \quad \int |K(u)|\, du < \infty, \quad \int K(u)\, du = 1 \right)$$

при $1 < p < \infty$. При этих значениях p имеет место также

Теорема 6. *Если $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, а меры $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$ обладают тем свойством, что*

$$\hat{\sigma}_2(x) = \hat{\sigma}_1(x) F(x)$$

при $|x| \leqslant 1$, где

$$|F(x)| \leqslant c_1, \quad \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} |F(kh) - F[(k+1)h]| \leqslant c_2$$

$(n_0 = 1 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots,\ n_{k+1}/n_k \geqslant g > 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, m,$
$0 < h < 1,\ n_{m+1} \leqslant 1/h)$,

то
$$D(f; \sigma_2; h; p) \leqslant A(\sigma_1, \sigma_2, p) \{D(f; \sigma_1; h; p) + E_{n_{m+1}}(f)_{L_p}\}. \tag{7}$$

Неравенство (7) в ряде конкретных случаев (например, когда $\hat{\sigma}_1(x) = |x|$, $\hat{\sigma}_2(x) = 1 - e^{-ix}$) дает точные в смысле порядка соотношения, которые не могут быть получены из оценок, содержащихся в [2].

Сравнение оценок из [2] с упомянутыми выше результатами автора (см. [3-6]) показывает, что в ряде важных случаев полученные в [2] неравенства носят грубый характер.

Поступило
1 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. S. Shapiro, Acta Math., 120, № 3—4 (1968). [2] J. Boman, H. S. Shapiro, Bull. Am. Math. Soc., 75, № 6 (1969). [3] М. Ф. Тиман, Матем. сборн., 46 (88), 1 (1958). [4] М. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, 3 (1965). [5] М. Ф. Тиман, Укр. Матем. журн., № 1 (1966). [6] М. Ф. Тиман, Исслед. по соврем. проблемам конструктивной теории функций, Баку, 1965, стр. 18.