Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 533.7 *АЭРОДИНАМИКА*

А. Д. ХОНЬКИН, Г. К. ШАПОВАЛОВ

О РАСПАДЕ СКАЧКОВ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ВЯЗКОМ ТЕПЛОПРОВОДНОМ ГАЗЕ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 17 XII 1970)

Часто математические трудности, возникающие при решении задач кинетической теории газов и расчетах течений разреженных газов на основе нелинейного интегро-дифференциального уравнения Больцмана [1, 2], стремятся преодолеть заменой интеграла столкновений модельным представлением, например, в форме Крука. Однако и в этом случае получаемое уравнение остается нелинейным и не имеет аналитического решения. В работах [3, 4] был развит асимптотический метод решения задачи Коши для линеаризованного уравнения Больцмана и отмечено, что линеаризованное уравнение Больцмана можно использовать для описания нелинейных задач динамики вязкого теплопроводного газа. В [4] было показано, как можно получить аналитическое решение одномерной задачи о распаде начального состояния, описываемого суперпозицией двух максвелловских распределений. В данной работе приводятся некоторые результаты решения этой задачи.

1. Рассмотрим в начальный момент времени состояние совершенного газа, описываемое функцией распределения

$$f|_{t=0} = \frac{n_1}{(2\pi RT_1)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2RT_1}\right) + \frac{n_2}{(2\pi RT_2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2RT_2}\right)\zeta_a(x), \qquad (1)$$

где $\zeta_a(x) = 0$ при $|x| \geqslant a$ и $\zeta_a(x) = 1$ при $|x| < a$. Тогда плотность газа и плотность внутренней энергии в момент $t = 0$ имеют вид

$$n(x) = n_1 + n_2\zeta_a(x),$$
$$E(x) = {}^3/_2 n(x)KT(x) = {}^3/_2 n_1KT_1 + {}^3/_2 n_2KT_2\zeta_a(x).$$

Значит, с газодинамической точки зрения в начальный момент времени в однородном покоящемся газе имеется слой толщины $2a$, в котором плотность и температура постоянны, но отличаются от плотности и температуры окружающего газа. Интересно рассмотреть эту задачу в рамках кинетической теории газов с использованием уравнения Больцмана. Во-первых, газовая динамика вытекает из кинетической теории как определенное асимптотическое описание газовых движений. Уравнение Больцмана позволяет получить более общее решение рассматриваемой проблемы и проследить, в каких пределах справедливо газодинамическое описание и при каких условиях кинетическое описание сводится к газодинамическому. Во-вторых, рассматриваемая задача неавтомодельна и не может быть решена аналитически в газодинамической постановке. При определенных условиях [4] решение уравнения Больцмана для этого случая выписывается аналитически.

Таким образом, рассматривается задача Коши для уравнения Больцмана с начальными данными (1), которое линеаризуем, полагая

$$f = \frac{n_1}{(2\pi RT_1)^{3/2}} \exp\frac{-v^2}{2RT_1}(1+\varphi). \qquad (2)$$

Функция φ удовлетворяет линеаризованному уравнению Больцмана и начальному условию, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\varphi|_{t=0} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{T_1}{T_2}-1\right)\right]\zeta_a(x). \tag{3}$$

Из (3) очевидно необходимое условие для линеаризации уравнения Больцмана

$$\nu b(\tau) = \nu\tau^{-3/2}\exp(-\tau^{-1}) \ll 1, \tag{4}$$

в которое входят два безразмерных параметра $\nu = n_2/n_1$ и $\tau = T_2/T_1$; для выполнения (4) не обязательно, чтобы оба они были малы. Функция $b(\tau)$ имеет максимум при $\tau_0 = 2/3$, равный приблизительно 0,4, и быстро убывает при удалении из окрестности точки τ_0, так что соотношение (4) можно обеспечить даже при больших ν и τ. В этом отношении линеаризация задачи Коши для уравнения Больцмана отличается от условий линеаризации в газовой динамике, где необходимо, чтобы возмущения всех параметров были малы. Линеаризованному уравнению Больцмана соответствуют нелинейные уравнения переноса, и оно, по-видимому, вполне применимо к описанию сильно неравновесных течений (см. также ([5], [6])).

2. В первом порядке асимптотической теории решение поставленной задачи для максвелловских молекул имеет вид ([4])

$$\varphi(k,\xi,t) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\left[\alpha_{\mu 0}^{(1)}e^{\lambda_{\mu 0}^{(2)}(\varepsilon)t}\Psi_{\mu 0}^{(1)}(\varepsilon) + \alpha_{\mu 1}^{(1)}e^{\lambda_{\mu 1}^{(2)}(\varepsilon)t}\Psi_{\mu 1}^{(1)}(\varepsilon)\right], \tag{5}$$

где $\varepsilon = -ik$ — безразмерное волновое число; $\lambda_{\mu\nu}^{(2)}(\varepsilon)$ и $\Psi_{\mu\nu}^{(1)}(\varepsilon)$ — собственные числа и функции оператора столкновений, возмущенного трансляционным членом, верхний индекс указывает, в каком порядке теории возмущений они вычислены; $\alpha_{\mu\nu}^{(1)}$ — коэффициенты разложения начального значения φ по сопряженной системе $\overline{\Psi_{\mu\nu}^{(1)}(\varepsilon)}$. Выражения для $\lambda_{\mu\nu}^{(2)}(\varepsilon)$ и $\Psi_{\mu\nu}^{(1)}(\varepsilon)$ приведены в ([4]), а коэффициенты $\alpha_{\mu\nu}^{(1)}$ легко вычислить, используя разложение

$$\varphi|_{t=0} = 2\nu\sum_{r=0}^{\infty}\left[\frac{2\Gamma(r+3/2)}{\pi^{1/2}r!}\right]^{1/2}(1-\tau)^2\frac{\sin ka}{k}\psi_{r0} \tag{6}$$

и выражения для $\Psi_{\mu\nu}^{(1)}(\varepsilon)$. В результате получается явное выражение для функции распределения $\varphi(k,\xi,t)$, из которого легко вычислить поправки к невозмущенным значениям плотности и температуры, скорость, напряжения и тепловой поток. Совершая обратное преобразование Фурье, получим распределения этих величин в физическом пространстве, выраженные через элементарные функции (показательную и функцию ошибок). Эти выражения громоздки и не приводятся здесь полностью. Однако они позволяют сделать ряд качественных выводов и асимптотических оценок.

В безразмерных переменных ([4]) асимптотическое выражение для поправки к распределению плотности при $x \gg a$, $t \gg a/c$, $x+a-ct \ll 1$ или $x-a-ct \ll 1$ имеет вид

$$\Delta n(x,t) = \frac{n(x,t)-n_1}{n_2} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\,\frac{3}{5}\,\tau\,\frac{a}{\sqrt{\lambda_{01}^{(2)}t}}, \tag{7}$$

где $\lambda_{01}^{(2)} = 2/3\lambda_{02}^{-1} + 1/3\lambda_{11}^{-1}$, λ_{02} и λ_{11} — собственные значения линеаризованного оператора столкновений для максвелловских молекул, обратно пропорциональные коэффициентам вязкости и теплопроводности соответственно.

3. На рис. 1 приведены безразмерные значения поправки к плотности $\Delta n(0, t)$ в начале координат ($x=0$) в функции времени для двух начальных перепадов температур $\tau=5$ и $\tau=10$ и двух значений начальной ширины ступеньки a. Вначале до момента, соответствующего приходу возмущений в точку $x=0$ из точек $x=\pm a$, величина $\Delta n(0, t)$ остается постоянной (этот участок практически незаметен на приведенных рисунках, так как чтобы проследить основную эволюцию кривых, пришлось сжать рисунки по оси времени). При больших t указанные кривые асимптотически стремятся к оси абсцисс снизу по закону

$$\Delta n(0, t) \sim (1 - {}^3/_5\tau)\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\lambda_{11}}{t}},$$

т. е. $\Delta n \to 0$ и $n(0, t) \to n_1$ (происходит выравнивание распределения плотности во всем пространстве). Согласно приведенным кривым, достигаемое максимальное разрежение в начале координат при фиксированной ширине a тем больше, чем больше начальный перепад температур τ, а при фиксированном перепаде τ тем больше, чем больше ширина разрыва a, т. е. масса нагретого газа.

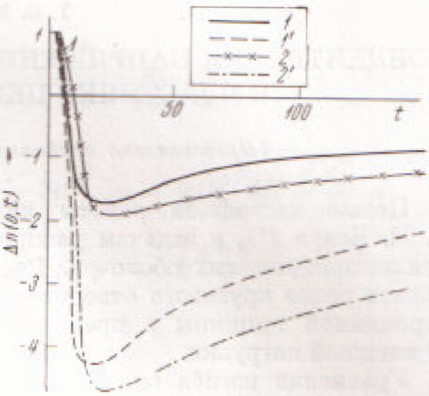

Рис. 1. Поправка к плотности газа $\Delta n(0, t)$ в начале координат при $\tau=5$ (1, 2), $\tau=10$ (1′, 2′) и $a=10$ (1, 1′), $a=15$ (2, 2′)

Интересно отметить, что поскольку плотность при $x=0$ определяется через $\Delta n(0, t)$ соотношением

$$n(0, t) = n_1[1 + \nu\Delta n(0, t)],$$

то при определенных значениях ν в некоторые моменты времени может оказаться, что $1 + \nu\Delta n(0, t) \leqslant 0$; в эти моменты времени весь газ уносится из области вблизи начала координат, в которой образуется пустота. Подобные решения известны также и в газовой динамике ([7]).

Центральный аэро-гидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
15 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Grad, Handb. d. Phys., Berlin, 12, 1957. [2] М. Н. Коган, Динамика разреженного газа, «Наука», 1967. [3] А. Д. Хонькин, ДАН, 190, № 3, 565 (1970). [4] А. Д. Хонькин, Теоретич. и математич. физика, 4, № 2, 253 (1970). [5] H. Grad, Transport Theory, Am. Math. Soc., Island, 1969. [6] G. Scharf, Phys. Fluids, 13, № 4, 848 (1970). [7] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., 1963.