К вопросу о σ-субнормальности силовской подгруппы в конечной группе

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова

В работе рассматриваются только конечные группы.

Известный критерий Виландта о субнормальности подгруппы в конечной группе инициировал следующий вопрос, предложенный А. Н. Скибой:

Верно ли, что подгруппа H σ-субнормальна в G, если H σ-субнормальна в $< H, x >$ для любого элемента $x \in G$?

Концепция σ-субнормальной подгруппы, развивающая идею субнормальной подгруппы, базируется на следующих определениях.

Пусть σ — некоторое разбиение множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно непересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т.е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. Группа G является *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, ..., n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/Core_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной. Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разложения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, ...\}$.

В данной работе поставленный выше вопрос анализируется в случае, когда H — силовская подгруппа группы G.

Теорема 1. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и G — группа, каждый неабелев композиционный фактор которой является либо знакопеременной, либо спорадической группой. Силовская подгруппа P группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда P σ-субнормальна в $< P, x >$ для любого элемента $x \in G$.*

Теорема 2. *Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Если $p \in \{2, 3\}$, то силовская p-подгруппа P группы G является σ-субнормальной в G тогда и только тогда, когда P σ-субнормальна в $< P, x >$ для любого элемента $x \in G$.*

Ключом к доказательству теорем 1 и 2 является результат, устанавливающий специальное строение минимального контрпримера, что позволяет редуцировать доказательство к классификации простых неабелевых групп.

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
E-mail: sfkamornikov@mail.ru
Международный университет "МИТСО", Гомель (Беларусь)
E-mail: vtutanov@gmail.com
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова, Москва
E-mail: ol-shem@mail.ru