

О строго 2-максимальных подгруппах конечных групп

В. С. МОНАХОВ, И. Л. СОХОР

Рассматриваются только конечные группы. Запись $M \leq G$ ($M < G$, $M \triangleleft G$) означает, что M — подгруппа (соответственно собственная подгруппа, максимальная подгруппа) группы G . Если H — подгруппа группы G , то $\text{Max}(G, H) = \{M < G \mid H \leq M\}$.

Подгруппа H группы G называется

2-максимальной подгруппой группы G , если существует подгруппа $M \in \text{Max}(G, H)$ такая, что $H < M$;

n -максимальной подгруппой группы G для $n \geq 3$, если существует подгруппа $M \in \text{Max}(G, H)$ такая, что H — $(n - 1)$ -максимальная подгруппа в M ;

строго 2-максимальной подгруппой группы G , если $H \triangleleft V$ для всех $V \in \text{Max}(G, H)$.

В группе $L_2(8)$ подгруппа C_2 порядка 2 является 2-, 3- и 4-максимальной: $C_2 < D_{14} < L_2(8)$; $C_2 < S_3 < D_{18} < L_2(8)$; $C_2 < C_2^2 < C_2^3 < C_2^3 : C_7 < L_2(8)$. Согласно [1, example 3] для любого $n > 2$ существует группа, в которой некоторая 2-максимальная подгруппа является n -максимальной.

Если в группе G существует 2-максимальная подгруппа, то 2-максимальная подгруппа наименьшего индекса в G будет строго 2-максимальной. Поэтому в любой неединичной группе непростого порядка существует строго 2-максимальная подгруппа. Из теоремы Хуперта следует, что в сверхразрешимой группе каждая 2-максимальная подгруппа строго 2-максимальна. Группа Фробениуса $C_3^2 : C_8$ [2, remark 4] и группа $L_2(17)$ также обладают этим свойством.

Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G — группа, $K \triangleleft M \triangleleft G$. Если $K_G \neq M_G$, то K — строго 2-максимальная подгруппа группы G . В частности, если максимальная подгруппа M группы G нормальна в G , то каждая максимальная в M подгруппа является строго 2-максимальной подгруппой группы G .

Следствие. Пусть G — p -разрешимая группа, $M < G$. Если $|G : M| = p$, то каждая максимальная в M подгруппа является строго 2-максимальной подгруппой группы G .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] MONAKHOV V. S., KNIAHINA V. N. Finite group with \mathbb{P} -subnormal subgroups. Ricerche Mat., 62 (2013), 307–323.
 [2] MENG H., GUO X. Weak second Maximal subgroups in solvable groups. J. Algebra, 517 (2019), 112–118.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель (Беларусь)

E-mail: victor.monakhov@gmail.com

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест (Беларусь)

E-mail: irina.sokhor@gmail.com